GEOMETRIA 2
Compito del 12 Gennaio 2015

Esercizio 1.
Si consideri il sottoinsieme A di $\mathbb{R}^2$ formato dai punti distinti a e b e si prenda lo spazio quoziente $X = \mathbb{R}^2/A$ ottenuto collassando A (ovvero dalla relazione di equivalenza per cui x è equivalente a y se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in A$). Si domanda:

(1) Se X sia connesso, compatto, di Hausdorff.
(2) Se esiste una immersione continua $f : S^1 \to X$ tale che $X \setminus f(S^1)$ non sia connesso.
(3) Se esiste una immersione continua $g : S^1 \to X$ tale che $X \setminus g(S^1)$ sia connesso.

Esercizio 2.
Si considerino in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ le due coniche

$$C : \{-2x_0^2 + 2x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_0x_2 = 0\}$$
$$D_k : \{x_0^2 + (k-4)x_1^2 + (k+1)x_2^2 + 2x_0x_1 = 0\}$$

dove k è un parametro reale.

(1) Per quali valori di k le due coniche sono proiettivamente equivalenti?
(2) Per quali valori di k sono omeomorfe?
(3) Per quali valori di k esiste un omeomorfismo di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che porta la prima conica sulla seconda?

Esercizio 3.
Sia p_0 un punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e Σ la stella di rette uscenti da p_0.

(1) Dimostrare che se $s_1, s_2 \in \Sigma$ allora essi sono omotopi in $\Omega(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), p_0, p_0)$.
(2) Dimostrare che per ogni $s \in \Sigma$, $[s]$ genera $\Pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), p_0)$.

Esercizio 4.
Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio di grado $n > 1$ e sia $a \in \mathbb{C}$. Dimostrare che esiste un intorno aperto V di a tale che se $U = p^{-1}(V) \setminus p^{-1}(a)$ allora $p|U : U \to V \setminus \{a\}$ sia un rivestimento.