

GEOMETRIA PROIETTIVA – A.A. 2009/2010
PRIMO COMPITINO – 26 NOVEMBRE 2009

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

Esercizio 3 (10 punti)

Sia (X, d) uno spazio metrico numerabile che contiene almeno due punti.

- (1) Mostra che se (X, d) è completo allora non è connesso.
- (2) Mostra che (X, d) non è connesso in nessun caso. (Suggerimento: usa la funzione “distanza da un punto fissato”.)

Soluzione.

GEOMETRIA PROIETTIVA – A.A. 2009/2010
PRIMO COMPITINO – 26 NOVEMBRE 2009

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

Esercizio 1 (10 punti)

Considera i seguenti sottoinsiemi di \mathbf{R}^2 :

$$I_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > a, y > b\}.$$

- (1) Mostra che $\mathcal{B} = \{I_{a,b} \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ è base di una topologia τ su \mathbf{R}^2 meno fine di quella euclidea.
- (2) Lo spazio topologico (\mathbf{R}^2, τ) è connesso? è compatto? è di Hausdorff?
- (3) Mostra che le traslazioni in \mathbf{R}^2 sono omeomorfismi di (\mathbf{R}^2, τ) .
- (4) Determina la chiusura $\overline{\{(x, y)\}}$ di un singolo $\{(x, y)\}$ in (\mathbf{R}^2, τ) .

Soluzione.

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

Esercizio 2 (10 punti)

Sia $n \geq 2$. Si consideri la relazione d'equivalenza seguente su \mathbb{R}^n : \(\backslash \} 09\)

$$v \sim w \iff v = 2^n w \text{ per qualche } n \in \mathbb{Z}.$$

Sia X lo spazio topologico quoziente \mathbb{R}^n / \sim .

- NO
- (1) Lo spazio X è compatto? è connesso? è di Hausdorff?
 - (2) Mostra che $X \cong S^{n-1} \times S^1$.
 - (3) Esiste una immersione di X in \mathbb{R}^{n+1} ?

Soluzione.

$$\left. \begin{array}{l} \|v\| > 2 \\ \|v\| \leq 2 \end{array} \right\} \boxed{2^k \leq \|v\| \leq 2^{k+1}} \quad 1 \leq \frac{\|v\|}{2^k} \leq 2$$

$$v = \rho(v_0) \quad v_0 \in S^{n-1}(0,1)$$

$$1 \leq \rho \leq 2 \quad S^{n-1} \times [1,2]$$

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \underbrace{S^{n-1}}_{\psi} \times \underbrace{]0, \infty[}_{\rho}$$