Geometria Proiettiva

II compito – 18 Febbraio 2010

Esercizio 1. Dato un insieme X, indichiamo con X_{cof} lo spazio topologico (X, τ_{cof}), dove τ_{cof} è l'usuale topologia cofinita:

$$\tau_{cof} = \{A \subset X \mid X \setminus A \text{ finito}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Sia X un insieme di cardinalità infinita.

(1) Sul prodotto cartesiano $X^2 = X \times X$ sono definite due topologie: $(X_{cof}) \times (X_{cof})$ e $(X \times X)_{cof}$. Coincidono?

(2) Lo spazio topologico $X_{cof} \times X_{cof}$ è compatto? $\Leftarrow\!\Rightarrow$ X_{cof} è compatto

(3) Lo spazio topologico $X_{cof} \times X_{cof}$ è di Hausdorff? $\Leftrightarrow$ ~~X_{cof} è T2~~ NO

Esercizio 2. Definiamo su $\mathbf{R}$ la seguente topologia τ:

$$\tau = \{A \subset \mathbf{R} \mid \forall x \in A \ \exists \varepsilon > 0 \text{ tale che } [x, x+\varepsilon[\subset A\}.$$

(1) Verifica che τ sia effettivamente una topologia.

(2) Lo spazio $(\mathbf{R}, \tau)$ è connesso?

(3) Sia τ_{Eucl} la topologia euclidea su $\mathbf{R}$. Mostra che ogni funzione continua

$$f : (\mathbf{R}, \tau_{Eucl}) \to (\mathbf{R}, \tau)$$

è costante.

Esercizio 3. Si considerino i seguenti spazi topologici.

- $X_1 = S^1 \times [0,1]$.
- $X_2 = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| \leqslant 2\}$.
- $X_3 = \{z \in \mathbf{C} \mid 1 \leqslant |z| \leqslant 2\}$.
- $X_4 = ([0,1] \times [0,1])/\sim$ dove $\sim$ è la relazione di equivalenza seguente:

$$(x,y) \sim (x',y') \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x,y) = (x',y'), \text{ oppure} \\ x = x' \text{ e } \{y,y'\} = \{0,1\}. \end{cases}$$

Dire quali spazi fra X_1, X_2, X_3 e X_4 sono omeomorfi.

Esercizio 4. Considera la quadrica Q in $\mathbf{R}^3$ definita dall'equazione

$$y - z^2 + x = xz - 1.$$

(1) Determina un'equazione proiettiva della chiusura proiettiva $\bar{Q}$ di Q in $\mathbb{RP}^3$.

(2) Determina l'intersezione di $\bar{Q}$ con il piano all'infinito. Si tratta di uno spazio connesso?

(3) La quadrica Q ha centro? Determina il tipo affine di Q.

(4) Determina il tipo proiettivo di $\bar{Q}$.

ES 1

controllare il 1° pto sul quad (lezione)

(1) No x' X è un chiuso e sia A un s.i. chiuso $\Rightarrow$ o finito ~~o~~

$\Rightarrow$ $X \times A$ ha cardinalità ∞ $\Rightarrow$ non è un chiuso

è un chiuso in $X_{cof} \times X_{cof}$ ma non lo è in $(X \times X)_{cof}$

2) $X_{cof} \times$ ~~X~~ X_{cof} compatto $\Leftarrow\!\Rightarrow$ X_{cof} compatto

T2 $\Leftarrow\!\Rightarrow$ " T2

(3) " "

X_{cof} ~~non~~ non è mai T2

ma osservo

$x \in U$ e $X \setminus U$ finito $\quad U \cap V = \emptyset \Rightarrow {}^c(U \cap V) = X$ $\quad$ ma X è ∞ invece

$y \in V$ e $X \setminus V$ finito $\quad$ " ${}^cU \cup {}^cV$ $\quad$ ${}^cU \cup {}^cV$ è unione di 2 insiemi finiti