Matematica Corso B

V Prova scritta – 13 Febbraio 2014

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA........................... VALUTAZIONE ....

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x - y + (a-1)z = 1 \\ ax + y - 3z = 3 - b \\ y + az = 1 \end{cases}$$

con Gauss diventa

$$\begin{cases} x - y + (a-1)z = 1 \\ y + az = 1 \\ -(3+4a^2)z = 2-b \end{cases}$$

$-2b$

$-(3+4a^2) \neq 0 \quad \forall a$

dove a, b sono parametri reali.

- Per quali valori di a, b il sistema ha una sola soluzione? $\boxed{\forall a \ \forall b}$
- Per quali valori di a, b il sistema non ha soluzioni? $\boxed{\text{mai}}$
- Per quali valori di a, b il sistema ha infinite soluzioni? $\boxed{\text{mai}}$

Esercizio 2 In una classe elementare ci sono 30 bambini, alcuni europei, alcuni asiatici ed alcuni africani. Essi pescano da una cesta contenente 300 quaderni di cui 100 con copertina verde, 100 rossa e 100 blu.

(1) Qual'è la probabilità che un ragazzo africano peschi un quaderno con copertina rossa? $\boxed{1/3}$

(2) Sapendo che 15 bambini sono europei, qual'è la probabilità che nessuno di essi peschi un quaderno con copertina rossa? $\boxed{}$ $\dfrac{\binom{200}{15}}{\binom{300}{15}}$

(3) È piú probabile che peschino un quaderno dello stesso colore blu tutti i bambini europei o che peschino un quaderno dello stesso colore verde tutti i bambini asiatici? $\boxed{\text{asiatici}}$

$a < 15 \quad \dfrac{\binom{200}{a}}{\binom{300}{a}} = \dfrac{200 \cdot 199 \cdots 200-a}{300 \cdot 299 \cdots 300-a}$

meno fattori < 1

Esercizio 3
Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + y' + ay = 0$$

dove a è un parametro reale.

- Scrivere la soluzione generale dell'equazione per ogni valore del parametro a

$$c_1 e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-4a}}{2}\right)x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1-4a}}{2}x} \text{ se } a < \frac{1}{4}$$
$$(c_1 + c_2 x) e^{-\frac{1}{2}x} \text{ se } a = \frac{1}{4}$$
$$e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{4a-1}}{2} x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{4a-1}}{2} x \right) \text{ se } a > \frac{1}{4}$$

- Per $a = -2$ determinare se esiste una soluzione che verifichi $y(0) = 0$ e $\int_0^1 y(x)dx = 1$.

Non esiste

Esiste $y = \frac{2e^2}{2e^3-3e^2+1}\left(e^x - e^{-2x}\right)$

Esercizio 4 Si consideri la funzione a valori reali

$$f(x) = \log(\cos(x) + 1)$$

- Determinare il dominio A di $f(x)$

$A = \{x \in \mathbf{R} \mid \cos x \neq -1\} = \{x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

- Dire se la funzione $f(x) : A \to \mathbf{R}$

(1) è iniettiva. Si / No perché è periodica

(2) è surgettiva. Si / No perché perché $\cos x + 1 \leq 2 \Rightarrow f(x) \leq \log 2$

(3) è periodica ed in caso affermativo determinarne il periodo T.

No
Si e il periodo T è 2π

- Dire se la funzione $f(x)$ ha punti di massimo o minimo relativo in $(-1,1) \cap A$.

Si / No perché $f(x)$ crescente tra -1 e 0 e decrescente tra 0 e 1

- Determinare un intervallo non vuoto in cui la funzione è decrescente

$(-1, 0)$

- Determinare l'insieme $\{x \in A : f(x) < 0\}$.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow \cos x + 1 < 1 \Leftrightarrow \cos x < 0 \Leftrightarrow \pi/2 + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

EQ. DIFFERENZIALE

$a = -2 \qquad 1 - 4a = 9 \qquad$ radici $\; -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$

$$-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$$

soluz. generale per $a = -2$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$$

Vogliamo $y(0) = 0$ quindi $c_1 + c_2 = 0 \qquad c_2 = -c_1$

ed inoltre

$$c_1 \int_0^1 \cancel{c_1}\left(e^{x} - e^{-2x}\right) dx = 1$$

$$\int_0^1 e^{x} dx = \left[e^{x}\right]_0^1 = e - 1$$

$$-\int_0^1 e^{-2x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 -2\, e^{-2x} dx = \frac{1}{2}\left[e^{-2x}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e^2} - 1\right]$$

dunque $\displaystyle\int_0^1 y(x) = e - \cancel{1} + \frac{1}{2e^2} - \frac{3}{2} = \frac{2e^3 + 1 - 3e^2}{2e^2}$

$$c_1 \cdot \frac{2e^3 + 1 - 3e^2}{2e^2} = 1 \qquad c_1 = \frac{2e^2}{2e^3 - 3e^2 + 1}$$

Colloquio integrativo

$p_{A_iA_i} = p_{A_i}^2 \qquad p_{A_iA_j} = 2\,p_{A_i}p_{A_j}$

C compare solo con $p_{CC} = \frac{9}{100}$

B compare solo con $p_{BB} = \frac{16}{100}$

$\Rightarrow \quad p_C = \frac{3}{10} \quad p_B = \frac{4}{10} \quad \Rightarrow \quad p_A = \frac{3}{10}$

$\Rightarrow \quad p_{AA} = \frac{9}{100}$ e li abbiamo tutti

$$p_{AB} = 2\,p_A p_B = 2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{24}{100}$$

$$p_{AC} = 2\,p_A p_C = 2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{18}{100}$$

fenotipo A $= p_{AA} + p_{AB} + p_{AC} =$