

Come si analizza un gioco

Parte II – Giochi strategici a somma zero

Alberto Abbondandolo

Filippo Giuliani

Alessandro Montagnani

Università di Pisa

Settimana di orientamento in Matematica 2010

Alice e Bruno giocano a carte



Alice e Bruno giocano a carte

- Alice e Bruno hanno due carte ciascuno: Alice ha un **A♦** e un **4♣**, Bruno un **2♠** e un **3♥**.



Alice e Bruno giocano a carte

- Alice e Bruno hanno due carte ciascuno: Alice ha un **A♦** e un **4♣**, Bruno un **2♠** e un **3♥**.
 - Scoprono ciascuno una delle loro carte, contemporaneamente.
-
-

Alice e Bruno giocano a carte

- Alice e Bruno hanno due carte ciascuno: Alice ha un **A♦** e un **4♣**, Bruno un **2♠** e un **3♥**.
 - Scoprono ciascuno una delle loro carte, contemporaneamente.
 - Se le due carte hanno lo stesso colore, Bruno vince da Alice tanti Euro quanto vale la somma delle carte (l'asso vale 1).
-
-

Alice e Bruno giocano a carte

- Alice e Bruno hanno due carte ciascuno: Alice ha un **A♦** e un **4♣**, Bruno un **2♠** e un **3♥**.
 - Scoprono ciascuno una delle loro carte, contemporaneamente.
 - Se le due carte hanno lo stesso colore, Bruno vince da Alice tanti Euro quanto vale la somma delle carte (l'asso vale 1).
 - Se le due carte hanno colore diverso, Alice vince da Bruno tanti Euro quanto vale la somma delle carte.
-
-

Conclusioni

- Se Bruno gioca il $2\spadesuit$ con probabilità $11/20$ e il $3\heartsuit$ con probabilità $9/20$, è sicuro di vincere in media $3/20$ di Euro (15 ¢) a partita. Non può fare meglio.

Conclusioni

- Se Bruno gioca il $2\spadesuit$ con probabilità $11/20$ e il $3\heartsuit$ con probabilità $9/20$, è sicuro di vincere in media $3/20$ di Euro (15 ¢) a partita. Non può fare meglio.
 - Se Alice gioca l' $A\diamondsuit$ con probabilità $13/20$ e il $4\clubsuit$ con probabilità $7/20$, è sicura di perdere in media $3/20$ di Euro (15 ¢) a partita. Non può fare meglio.
-
-

Le ipotesi di Von Neumann

- Alice ha disposizione l'insieme di opzioni $X = \{1, 2, \dots, m\}$.

Le ipotesi di Von Neumann

- Alice ha disposizione l'insieme di opzioni $X = \{1, 2, \dots, m\}$.
- Bruno ha disposizione l'insieme di opzioni $Y = \{1, 2, \dots, n\}$.

Le ipotesi di Von Neumann

- Alice ha disposizione l'insieme di opzioni $X = \{1, 2, \dots, m\}$.
 - Bruno ha disposizione l'insieme di opzioni $Y = \{1, 2, \dots, n\}$.
 - Se Alice sceglie l'opzione i e Bruno sceglie l'opzione j , il beneficio di Alice è il numero $a(i, j)$,
mentre il beneficio di Bruno è il numero $-a(i, j)$.
-
-

Strategie miste

- Le singole opzioni sono anche dette “strategie pure”. Una “strategia mista” per Alice è qualcosa del tipo:



Strategie miste

- Le singole opzioni sono anche dette “strategie pure”. Una “strategia mista” per Alice è qualcosa del tipo:
- sceglierò l'opzione 1 con probabilità $p(1)$,
sceglierò l'opzione 2 con probabilità $p(2)$,
.....
sceglierò l'opzione m con probabilità $p(m)$.

Strategie miste

- Le singole opzioni sono anche dette “strategie pure”. Una “strategia mista” per Alice è qualcosa del tipo:
 - sceglierò l'opzione 1 con probabilità $p(1)$,
sceglierò l'opzione 2 con probabilità $p(2)$,
.....
sceglierò l'opzione m con probabilità $p(m)$.
 - Qua $p(1)$, $p(2)$, ... , $p(m)$ sono numeri tra 0 e 1 , con somma 1 .
-
-

Strategie miste

- Le singole opzioni sono anche dette “strategie pure”. Una “strategia mista” per Alice è qualcosa del tipo:
 - sceglierò l'opzione 1 con probabilità $p(1)$,
sceglierò l'opzione 2 con probabilità $p(2)$,
.....
sceglierò l'opzione m con probabilità $p(m)$.
 - Qua $p(1), p(2), \dots, p(m)$ sono numeri tra 0 e 1 , con somma 1 .
 - L'insieme delle strategie miste per Alice si indica con X^* . Analogamente, si definisce Y^* per Bruno.
-
-

Qualche formula utile

- Supponiamo che Alice scelga la strategia pura i e Bruno giochi la strategia mista $(q(1), q(2), \dots, q(n))$.

Qualche formula utile

- Supponiamo che Alice scelga la strategia pura i e Bruno giochi la strategia mista $(q(1), q(2), \dots, q(n))$.
- In questo caso il beneficio medio di Alice è:

$$\sum_j a(i,j) q(j)$$

dove sommiamo al variare di j da 1 a n .

Qualche formula utile

- Supponiamo che Alice scelga la strategia pura i e Bruno giochi la strategia mista $(q(1), q(2), \dots, q(n))$.
- In questo caso il beneficio medio di Alice è:

$$\sum_j a(i,j) q(j)$$

dove sommiamo al variare di j da 1 a n .

- Se anche Alice sceglie una strategia mista, diciamo $(p(1), p(2), \dots, p(m))$, allora il suo beneficio medio è:

$$\sum_{i,j} p(i) a(i,j) q(j)$$

dove i varia da 1 a m , mentre j varia 1 a n .

La migliore delle situazioni peggiori per Bruno

- Bruno sta valutando se adottare o meno una certa strategia mista $(q(1), q(2), \dots, q(n))$. Se la adotta, quale sarà la situazione peggiore al variare delle possibili risposte p di Alice?

La migliore delle situazioni peggiori per Bruno

- Bruno sta valutando se adottare o meno una certa strategia mista $(q(1), q(2), \dots, q(n))$. Se la adotta, quale sarà la situazione peggiore al variare delle possibili risposte p di Alice?

-

$$\max_{p \in X^*} \sum_{i,j} p(i) a(i,j) q(j)$$

La migliore delle situazioni peggiori per Bruno

- Bruno sta valutando se adottare o meno una certa strategia mista $(q(1), q(2), \dots, q(n))$. Se la adotta, quale sarà la situazione peggiore al variare delle possibili risposte p di Alice?

-

$$\max_{p \in X^*} \sum_{i,j} p(i) a(i,j) q(j)$$

- Quale scelta di q gli permette di minimizzare i danni?

La migliore delle situazioni peggiori per Bruno

- Bruno sta valutando se adottare o meno una certa strategia mista $(q(1), q(2), \dots, q(n))$. Se la adotta, quale sarà la situazione peggiore al variare delle possibili risposte p di Alice?

-

$$\min_{q \in Y^*} \max_{p \in X^*} \sum_{i,j} p(i) a(i,j) q(j)$$

- Quale scelta di q gli permette di minimizzare i danni?

Valori del gioco

- Il valore appena trovato,

$$V(B) = \min_{q \in Y^*} \max_{p \in X^*} \sum_{i,j} p(i) a(i,j) q(j)$$

è il migliore risultato che Bruno è sicuro di poter ottenere.

Valori del gioco

- Il valore appena trovato,

$$V(B) = \min_{q \in Y^*} \max_{p \in X^*} \sum_{i,j} p(i) a(i,j) q(j)$$

è il migliore risultato che Bruno è sicuro di poter ottenere.

- Simmetricamente,

$$V(A) = \max_{p \in X^*} \min_{q \in Y^*} \sum_{i,j} p(i) a(i,j) q(j)$$

è il migliore risultato che Alice è sicura di poter ottenere.

Il teorema di Von Neumann

- Il Teorema di Von Neumann asserisce che:
$$V(A) = V(B).$$

Il teorema di Von Neumann

- Il Teorema di Von Neumann asserisce che:

$$V(A) = V(B).$$

- In altre parole, il miglior risultato (il beneficio più alto) che Alice è sicura di poter ottenere coincide con il miglior risultato (il beneficio più basso) che Bruno è sicuro di poter ottenere.
-
-

Il teorema di Von Neumann

- Il Teorema di Von Neumann asserisce che:
$$V(A) = V(B).$$
 - In altre parole, il miglior risultato (il beneficio più alto) che Alice è sicura di poter ottenere coincide con il miglior risultato (il beneficio più basso) che Bruno è sicuro di poter ottenere.
 - Questo come valore si dice *valore del gioco*.
-
-

Il teorema di Von Neumann

- Il Teorema di Von Neumann asserisce che:
$$V(A) = V(B).$$
 - In altre parole, il miglior risultato (il beneficio più alto) che Alice è sicura di poter ottenere coincide con il miglior risultato (il beneficio più basso) che Bruno è sicuro di poter ottenere.
 - Questo come valore si dice **valore del gioco**.
 - Le strategie miste di Alice e Bruno che realizzano il valore del gioco si dicono **ottimali**.
-
-

I punti sella

- Un **punto sella** è un coefficiente della matrice $a(i,j)$ che è minimo della sua riga e massimo della sua colonna.

I punti sella

- Un **punto sella** è un coefficiente della matrice $a(i,j)$ che è minimo della sua riga e massimo della sua colonna.

- Esempio:

$$\begin{array}{cccc} -7 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

I punti sella

- Un **punto sella** è un coefficiente della matrice $a(i,j)$ che è minimo della sua riga e massimo della sua colonna.
 - Esempio:

-7	3	-2	-1
0	2	-1	5
5	5	-3	0
 - Se c'è un punto sella di coordinate (i,j) , il valore del gioco è $a(i,j)$ e le strategie pure “Alice sceglie i ” e “Bruno sceglie j ” sono ottimali.
-
-

Soluzione dei giochi 2x2

- Ecco come risolvere un gioco 2x2

a b

c d



Soluzione dei giochi 2x2

- Ecco come risolvere un gioco 2x2

a b

c d

- 1) Vedere se ci sono punti sella.



Soluzione dei giochi 2x2

- Ecco come risolvere un gioco 2x2

$$\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}$$

- 1) Vedere se ci sono punti sella.
 - 2) Se non ce ne sono, le strategie ottimali sono quelle per cui il beneficio è il medesimo, sia che l'avversario scelga la prima opzione sia che scelga la seconda.
-
-

Righe e colonne dominate

- Se c'è una riga i cui coefficienti sono maggiori o uguali a quelli di un'altra riga, quest'ultima può essere eliminata.

Righe e colonne dominate

- Se c'è una riga i cui coefficienti sono maggiori o uguali a quelli di un'altra riga, quest'ultima può essere eliminata.

$$2 \quad -1 \quad 0 \quad 6$$

$$1 \quad 4 \quad -2 \quad 0$$

$$2 \quad -2 \quad -1 \quad 3$$

Righe e colonne dominate

- Se c'è una riga i cui coefficienti sono maggiori o uguali a quelli di un'altra riga, quest'ultima può essere eliminata.

- $$\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \end{array}$$

Righe e colonne dominate

- Se c'è una riga i cui coefficienti sono maggiori o uguali a quelli di un'altra riga, quest'ultima può essere eliminata.
- $$\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \end{array}$$
- Se c'è una colonna i cui coefficienti sono minori o uguali a quelli di un'altra colonna, quest'ultima può essere eliminata.

Righe e colonne dominate

- Se c'è una riga i cui coefficienti sono maggiori o uguali a quelli di un'altra riga, quest'ultima può essere eliminata.
- $$\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \end{array}$$
- Se c'è una colonna i cui coefficienti sono minori o uguali a quelli di un'altra colonna, quest'ultima può essere eliminata.

Righe e colonne dominate

- Se c'è una riga i cui coefficienti sono maggiori o uguali a quelli di un'altra riga, quest'ultima può essere eliminata.
- $$\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{array}$$
- Se c'è una colonna i cui coefficienti sono minori o uguali a quelli di un'altra colonna, quest'ultima può essere eliminata.

Un semplice modello del Poker

- Alice e Bruno mettono un Euro ciascuno nel piatto.

Un semplice modello del Poker

- Alice e Bruno mettono un Euro ciascuno nel piatto.
- Alice pesca una carta da un mazzo di 12, composto da J, Q, K, e A dei 4 semi. L'asso è vincente, le altre carte sono perdenti. Alice guarda la sua carta ma non la mostra a Bruno.

Un semplice modello del Poker

- Alice e Bruno mettono un Euro ciascuno nel piatto.
 - Alice pesca una carta da un mazzo di 12, composto da J, Q, K, e A dei 4 semi. L'asso è vincente, le altre carte sono perdenti. Alice guarda la sua carta ma non la mostra a Bruno.
 - Alice può **stare** o **puntare**. Se sta, vince il piatto se ha un Asso, lo cede a Bruno altrimenti.
-
-

Un semplice modello del Poker

- Alice e Bruno mettono un Euro ciascuno nel piatto.
 - Alice pesca una carta da un mazzo di 12, composto da J, Q, K, e A dei 4 semi. L'asso è vincente, le altre carte sono perdenti. Alice guarda la sua carta ma non la mostra a Bruno.
 - Alice può **stare** o **puntare**. Se sta, vince il piatto se ha un Asso, lo cede a Bruno altrimenti.
 - Se punta, mette 2 Euro nel piatto. In questo caso, Bruno può **vedere** o **passare**.
-
-

Un semplice modello del Poker

- Alice e Bruno mettono un Euro ciascuno nel piatto.
 - Alice pesca una carta da un mazzo di 12, composto da J, Q, K, e A dei 4 semi. L'asso è vincente, le altre carte sono perdenti. Alice guarda la sua carta ma non la mostra a Bruno.
 - Alice può **stare** o **puntare**. Se sta, vince il piatto se ha un Asso, lo cede a Bruno altrimenti.
 - Se punta, mette 2 Euro nel piatto. In questo caso, Bruno può **vedere** o **passare**.
 - Se vede, mette 2 Euro nel piatto e scopre la carta di Alice. Se passa cede il piatto ad Alice.
-
-

Strategie di Alice

Strategie di Bruno



Strategie di Alice

Strategie di Bruno

- *Ardita*: puntare sempre.



Strategie di Alice

Strategie di Bruno

- *Ardita*: puntare sempre.
- *Prudente*: puntare con l'Asso, stare altrimenti.



Strategie di Alice

Strategie di Bruno

- *Ardita*: puntare sempre.
 - *Prudente*: puntare con l'Asso, stare altrimenti.
 - *Stupida*: puntare con la figura, stare con l'Asso.
-
-

Strategie di Alice

Strategie di Bruno

- **Ardita**: puntare sempre.
 - **Prudente**: puntare con l'Asso, stare altrimenti.
 - **Stupida**: puntare con la figura, stare con l'Asso.
 - **Pessimista**: stare sempre.
-
-

Strategie di Alice

- **Ardita**: puntare sempre.
- **Prudente**: puntare con l'Asso, stare altrimenti.
- **Stupida**: puntare con la figura, stare con l'Asso.
- **Pessimista**: stare sempre.

Strategie di Bruno

- **Passo**: Se Alice punta, passare.



Strategie di Alice

- **Ardita**: puntare sempre.
- **Prudente**: puntare con l'Asso, stare altrimenti.
- **Stupida**: puntare con la figura, stare con l'Asso.
- **Pessimista**: stare sempre.

Strategie di Bruno

- **Passo**: Se Alice punta, passare.
- **Vedo**: Se Alice punta, vedere.



La tabella del gioco

Passo

Vedo

Ardita

Prudente

Stupida

Pessimista

La tabella del gioco

	Passo	Vedo
Ardita	1	-3/2
Prudente		
Stupida		
Pessimista		

La tabella del gioco

	Passo	Vedo
Ardita	1	$-3/2$
Prudente	$-1/2$	0
Stupida		
Pessimista		

La tabella del gioco

	Passo	Vedo
Ardita	1	$-3/2$
Prudente	$-1/2$	0
Stupida	1	-2
Pessimista		

La tabella del gioco

	Passo	Vedo
Ardita	1	$-3/2$
Prudente	$-1/2$	0
Stupida	1	-2
Pessimista	$-1/2$	$-1/2$

Rimozione righe dominate

	Passo	Vedo
Ardita	1	-3/2
Prudente	-1/2	0
Stupida	1	-2
Pessimista	-1/2	-1/2

Rimozione righe dominate

	Passo	Vedo
Ardita	1	-3/2
Prudente	-1/2	0
Stupida		
Pessimista	-1/2	-1/2

Rimozione righe dominate

	Passo	Vedo
Ardita	1	-3/2
Prudente	-1/2	0
Stupida		
Pessimista	-1/2	-1/2

Rimozione righe dominate

	Passo	Vedo
Ardita	1	-3/2
Prudente	-1/2	0
Stupida		
Pessimista		

Risoluzione del gioco

- | | Passo | Vedo |
|----------|-------|------|
| Ardita | 1 | -3/2 |
| Prudente | -1/2 | 0 |

Risoluzione del gioco

- | | Passo | Vedo |
|----------|-------|------|
| Ardita | 1 | -3/2 |
| Prudente | -1/2 | 0 |
- Non ci sono punti sella.

Risoluzione del gioco

- | | Passo | Vedo |
|----------|-------|------|
| Ardita | 1 | -3/2 |
| Prudente | -1/2 | 0 |
- Non ci sono punti sella.
- Alice è ardita con probabilità p , prudente $(1-p)$.

Risoluzione del gioco

- | | Passo | Vedo |
|----------|-------|------|
| Ardita | 1 | -3/2 |
| Prudente | -1/2 | 0 |
- Non ci sono punti sella.
- Alice è ardita con probabilità p , prudente $(1-p)$.
- Se Bruno passa il beneficio è:
$$1 p - 1/2 (1-p) = 3/2 p - 1/2.$$

Risoluzione del gioco

- | | Passo | Vedo |
|----------|-------|------|
| Ardita | 1 | -3/2 |
| Prudente | -1/2 | 0 |
- Non ci sono punti sella.
- Alice è ardita con probabilità p , prudente $(1-p)$.
- Se Bruno passa il beneficio è:
$$1 p - 1/2 (1-p) = 3/2 p - 1/2.$$
- Se Bruno vede il beneficio è:
$$-3/2 p + 0 (1-p) = -3/2 p.$$

Risoluzione del gioco

- | | Passo | Vedo |
|----------|-------|------|
| Ardita | 1 | -3/2 |
| Prudente | -1/2 | 0 |
- Non ci sono punti sella.
- Alice è ardita con probabilità p , prudente $(1-p)$.
- Se Bruno passa il beneficio è:
$$1 p - 1/2 (1-p) = 3/2 p - 1/2.$$
- Se Bruno vede il beneficio è:
$$-3/2 p + 0 (1-p) = -3/2 p.$$
- Uguagliando i benefici: $p = 1/6$.

Risoluzione del gioco

- | | Passo | Vedo |
|----------|-------|------|
| Ardita | 1 | -3/2 |
| Prudente | -1/2 | 0 |
 - Non ci sono punti sella.
 - Alice è ardita con probabilità p , prudente $(1-p)$.
 - Se Bruno passa il beneficio è:
$$1 p - 1/2 (1-p) = 3/2 p - 1/2.$$
 - Se Bruno vede il beneficio è:
$$-3/2 p + 0 (1-p) = -3/2 p.$$
 - Uguagliando i benefici: $p = 1/6$.
 - Valore del gioco: $V = -1/4$.
-
-

Risoluzione del gioco

- | | Passo | Vedo |
|----------|-------|------|
| Ardita | 1 | -3/2 |
| Prudente | -1/2 | 0 |
 - Non ci sono punti sella.
 - Alice è ardita con probabilità p , prudente $(1-p)$.
 - Se Bruno passa il beneficio è:
$$1 p - 1/2 (1-p) = 3/2 p - 1/2.$$
 - Se Bruno vede il beneficio è:
$$-3/2 p + 0 (1-p) = -3/2 p.$$
 - Uguagliando i benefici: $p = 1/6$.
 - Valore del gioco: $V = -1/4$.
 - Strategia di Bruno: vedere con probabilità $q = 1/2$.
-
-

Per saperne di più

- John Von Neumann, Oskar Morgenstern, “Theory of games and economic behavior”, Princeton University Press 1944.
- Thomas S. Ferguson, “Game theory”,
http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/Contents.html

E ora a voi !

1) Sherlock Holmes contro il Professor Moriarty.

E ora a voi !

- 1) Sherlock Holmes contro il Professor Moriarty.
- 2) Alice e Bruno al pub.

E ora a voi !

- 1) Sherlock Holmes contro il Professor Moriarty.
- 2) Alice e Bruno al pub.
- 3) Come si analizzano i giochi $2 \times N$?

E ora a voi !

- 1) Sherlock Holmes contro il Professor Moriarty.
 - 2) Alice e Bruno al pub.
 - 3) Come si analizzano i giochi $2 \times N$?
 - 4) Indovina il numero.
-
-

E ora a voi !

- 1) Sherlock Holmes contro il Professor Moriarty.
 - 2) Alice e Bruno al pub.
 - 3) Come si analizzano i giochi $2 \times N$?
 - 4) Indovina il numero.
 - 5) Gli Alleati contro la Germania.
-
-

E ora a voi !

- 1) Sherlock Holmes contro il Professor Moriarty.
 - 2) Alice e Bruno al pub.
 - 3) Come si analizzano i giochi $2 \times N$?
 - 4) Indovina il numero.
 - 5) Gli Alleati contro la Germania.
 - 6) Il Colonnello Blotto contro il Luogotenente Kije.
-
-

E ora a voi !

- 1) Sherlock Holmes contro il Professor Moriarty.
 - 2) Alice e Bruno al pub.
 - 3) Come si analizzano i giochi $2 \times N$?
 - 4) Indovina il numero.
 - 5) Gli Alleati contro la Germania.
 - 6) Il Colonnello Blotto contro il Luogotenente Kije.
 - 7) Il gioco di Mendelsohn.
-
-

E ora a voi !

- 1) Sherlock Holmes contro il Professor Moriarty.
 - 2) Alice e Bruno al pub.
 - 3) Come si analizzano i giochi $2 \times N$?
 - 4) Indovina il numero.
 - 5) Gli Alleati contro la Germania.
 - 6) Il Colonnello Blotto contro il Luogotenente Kije.
 - 7) Il gioco di Mendelsohn.
 - 8) Il poker di Kuhn.
-
-

E ora a voi !

- 1) Sherlock Holmes contro il Professor Moriarty.
- 2) Alice e Bruno al pub.
- 3) Come si analizzano i giochi $2 \times N$?
- 4) Indovina il numero.
- 5) Gli Alleati contro la Germania.
- 6) Il Colonnello Blotto contro il Luogotenente Kije.
- 7) Il gioco di Mendelsohn.
- 8) Il poker di Kuhn.

- Risolutore di giochi a somma zero:

<http://www.math.ucla.edu/~tom/gamesolve.html>

Alice e Bruno al pub

- Bruno incontra Alice al pub e le propone questo gioco: alziamo una mano contemporaneamente, mostrando una o due dita. Se entrambi abbiamo mostrato un dito, mi paghi un Whiskey, se entrambi abbiamo mostrato due dita, me ne paghi due, se i numeri non coincidono ti do un Euro.

Alice e Bruno al pub

- Bruno incontra Alice al pub e le propone questo gioco: alziamo una mano contemporaneamente, mostrando una o due dita. Se entrambi abbiamo mostrato un dito, mi paghi un Whiskey, se entrambi abbiamo mostrato due dita, me ne paghi due, se i numeri non coincidono ti do un Euro.
 - Alice guarda i prezzi: un Whiskey costa 5,50 €. “Il gioco non mi sembra equo” risponde, “ma se prima di ogni partita accetti di darmi 4,20 €, gioco volentieri”. Sono giusti i calcoli di Alice?
-
-