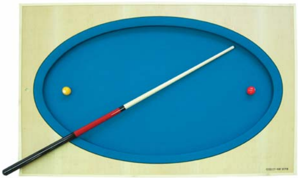
Biliardi matematici

Alberto Abbondandolo

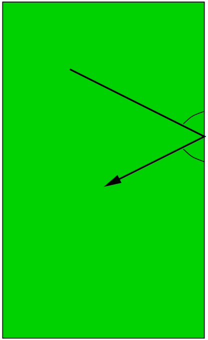
Università di Pisa

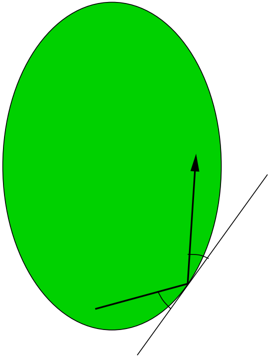
AlfaClass Update, 20-22 maggio 2011



La legge di riflessione

La palla da biliardo, che pensiamo puntiforme, rimbalza sulla sponda formando con essa un angolo di riflessione uguale all'angolo di incidenza.



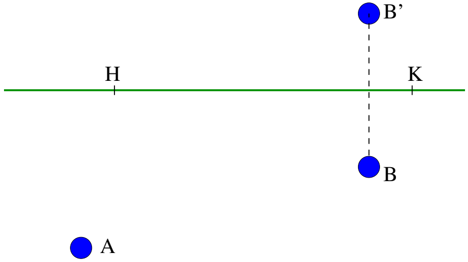


Giocare di sponda

Su quale punto della sponda HK occorre mirare in modo che la palla inizialmente in A raggiunga la posizione B?

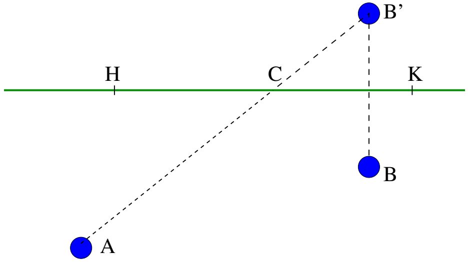
Giocare di sponda

Su quale punto della sponda HK occorre mirare in modo che la palla inizialmente in A raggiunga la posizione B?



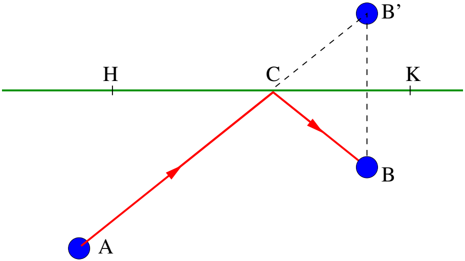
Giocare di sponda

Su quale punto della sponda HK occorre mirare in modo che la palla inizialmente in A raggiunga la posizione B?



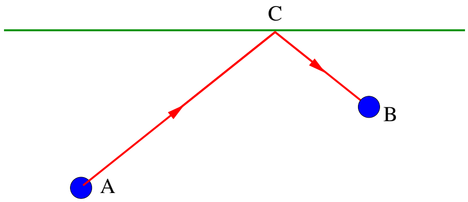
Giocare di sponda

Su quale punto della sponda HK occorre mirare in modo che la palla inizialmente in A raggiunga la posizione B?



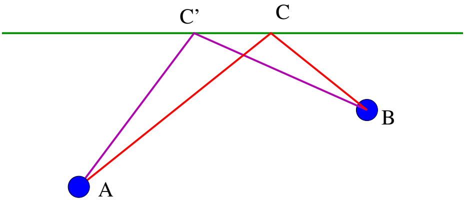
Principio di minimo

Il percorso ACB su cui si muove la palla da biliardo ha lunghezza minima tra tutti i percorsi che partono da A, toccano la sponda e raggiungono B.



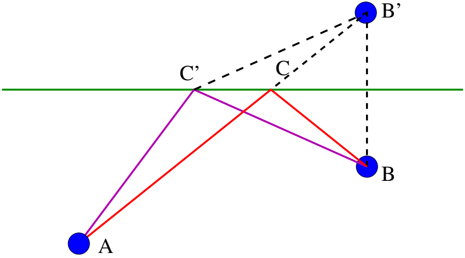
Principio di minimo

Il percorso ACB su cui si muove la palla da biliardo ha lunghezza minima tra tutti i percorsi che partono da A, toccano la sponda e raggiungono B.



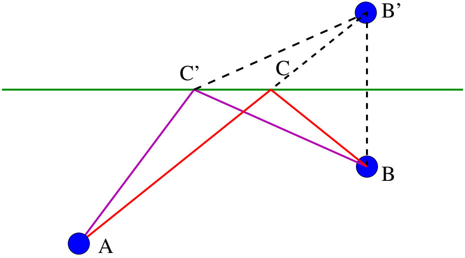
Principio di minimo

Il percorso ACB su cui si muove la palla da biliardo ha lunghezza minima tra tutti i percorsi che partono da A, toccano la sponda e raggiungono B.



Principio di minimo

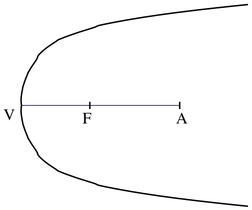
Il percorso ACB su cui si muove la palla da biliardo ha lunghezza minima tra tutti i percorsi che partono da A, toccano la sponda e raggiungono B.



Questo è l'analogo del principio di Fermat: i raggi di luce scelgono la traiettoria che rende minimo il tempo di percorrenza.

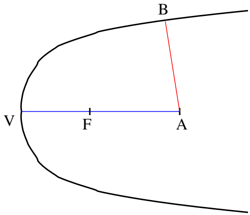
Il principio di minimo è falso

Biliardo a forma di parabola, punto A sul suo asse di simmetria, oltre il fuoco F. Se la palla viene lanciata verso il vertice della parabola V, rimbalza e torna in A.



Il principio di minimo è falso

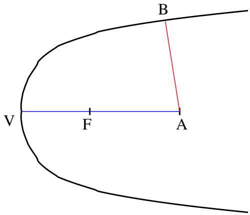
Biliardo a forma di parabola, punto A sul suo asse di simmetria, oltre il fuoco F. Se la palla viene lanciata verso il vertice della parabola V, rimbalza e torna in A.



Però AVA non ha lunghezza minima: un percorso di lunghezza minima è ABA.

Il principio di minimo è falso

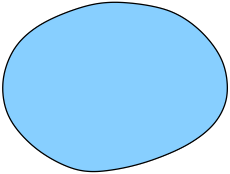
Biliardo a forma di parabola, punto A sul suo asse di simmetria, oltre il fuoco F. Se la palla viene lanciata verso il vertice della parabola V, rimbalza e torna in A.



Però AVA non ha lunghezza minima: un percorso di lunghezza minima è ABA.
La traiettoria di una palla da biliardo rende stazionaria la lunghezza.

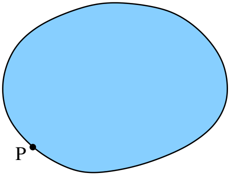
La mappa biliardo

Spazio delle fasi X di un biliardo B:



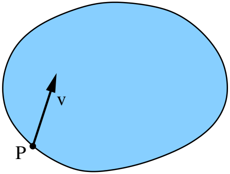
La mappa biliardo

Spazio delle fasi X di un biliardo B:



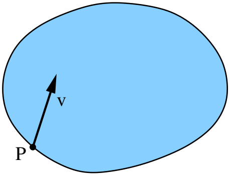
La mappa biliardo

Spazio delle fasi X di un biliardo B:



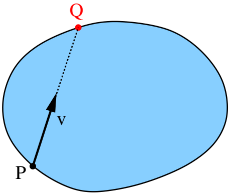
La mappa biliardo

Spazio delle fasi X di un biliardo B: insieme delle coppie (P, v), dove P è un punto sul bordo del biliardo ∂B, mentre v è un vettore di norma 1 che pensiamo applicato in P e che punta verso l'interno di B.



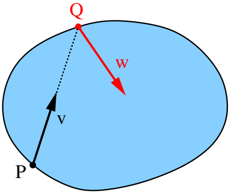
La mappa biliardo

Spazio delle fasi X di un biliardo B: insieme delle coppie (P, v), dove P è un punto sul bordo del biliardo ∂B, mentre v è un vettore di norma 1 che pensiamo applicato in P e che punta verso l'interno di B.



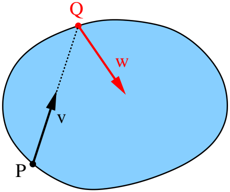
La mappa biliardo

Spazio delle fasi X di un biliardo B: insieme delle coppie (P, v), dove P è un punto sul bordo del biliardo ∂B, mentre v è un vettore di norma 1 che pensiamo applicato in P e che punta verso l'interno di B.



La mappa biliardo

Spazio delle fasi X di un biliardo B: insieme delle coppie (P, v), dove P è un punto sul bordo del biliardo ∂B, mentre v è un vettore di norma 1 che pensiamo applicato in P e che punta verso l'interno di B.

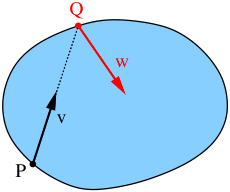


La mappa biliardo è l'applicazione

$$F : X \to X, \quad F(P, v) = (Q, w).$$

La mappa biliardo

Spazio delle fasi X di un biliardo B: insieme delle coppie (P, v), dove P è un punto sul bordo del biliardo ∂B, mentre v è un vettore di norma 1 che pensiamo applicato in P e che punta verso l'interno di B.



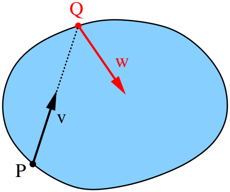
La mappa biliardo è l'applicazione

$$F : X \to X, \quad F(P, v) = (Q, w).$$

La mappa biliardo è un esempio di sistema dinamico a tempo discreto.

La mappa biliardo

Spazio delle fasi X di un biliardo B: insieme delle coppie (P, v), dove P è un punto sul bordo del biliardo ∂B, mentre v è un vettore di norma 1 che pensiamo applicato in P e che punta verso l'interno di B.

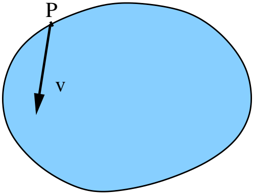


La mappa biliardo è l'applicazione

$$F : X \to X, \quad F(P, v) = (Q, w).$$

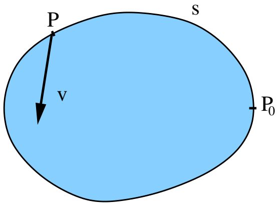
La mappa biliardo è un esempio di sistema dinamico a tempo discreto.
Siamo interessati a studiare le iterate F^n di F e le orbite di F.

Rappresentazione cartesiana dello spazio delle fasi



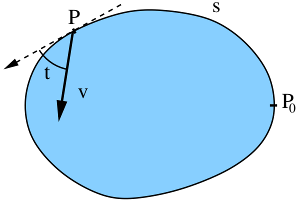
Rappresentazione cartesiana dello spazio delle fasi

Detta L la lunghezza di ∂B e fissato arbitrariamente un punto P_0 su ∂B, al punto P associamo il numero $s \in [0, L[$, lunghezza dell'arco da P_0 a P, ottenuto muovendosi in senso antiorario.



Rappresentazione cartesiana dello spazio delle fasi

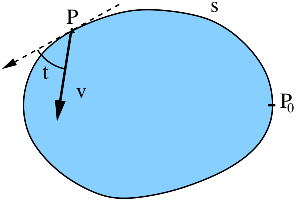
Detta L la lunghezza di ∂B e fissato arbitrariamente un punto P_0 su ∂B, al punto P associamo il numero $s \in [0, L[$, lunghezza dell'arco da P_0 a P, ottenuto muovendosi in senso antiorario.



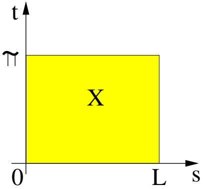
Chiamiamo $t \in]0, \pi[$ l'angolo tra il vettore v e la semiretta tangente a ∂B per P, in direzione antioraria.

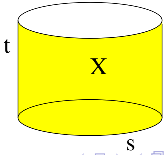
Rappresentazione cartesiana dello spazio delle fasi

Detta L la lunghezza di ∂B e fissato arbitrariamente un punto P_0 su ∂B, al punto P associamo il numero $s \in [0, L[$, lunghezza dell'arco da P_0 a P, ottenuto muovendosi in senso antiorario.

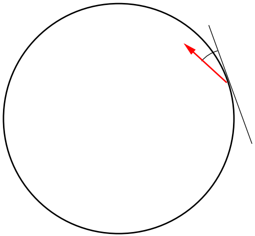


Chiamiamo $t \in]0, \pi[$ l'angolo tra il vettore v e la semiretta tangente a ∂B per P, in direzione antioraria.

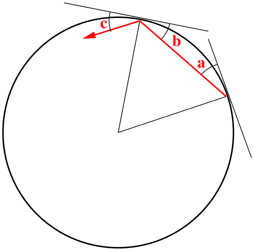




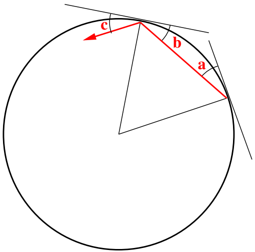
Il biliardo circolare



Il biliardo circolare

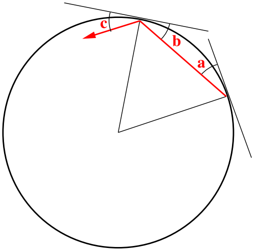


Il biliardo circolare



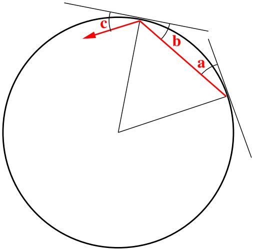
L'angolo che il vettore v individua con la tangente resta invariato.

Il biliardo circolare



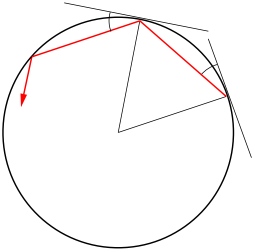
L'angolo che il vettore v individua con la tangente resta invariato.
La funzione $h(s,t) = t$ è un integrale primo del moto.

Il biliardo circolare



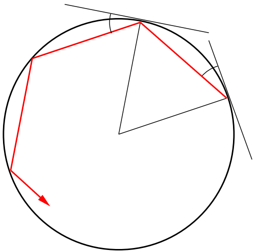
L'angolo che il vettore v individua con la tangente resta invariato.
La funzione $h(s,t) = t$ è un integrale primo del moto.
La mappa F ha la forma $F(s,t) = (s + 2t, t)$.

Il biliardo circolare



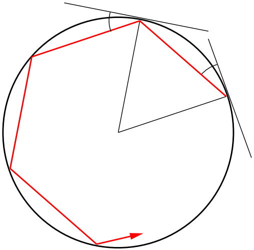
L'angolo che il vettore v individua con la tangente resta invariato.
La funzione $h(s,t) = t$ è un integrale primo del moto.
La mappa F ha la forma $F(s,t) = (s + 2t, t)$.

Il biliardo circolare



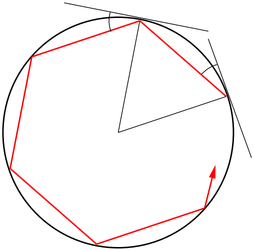
L'angolo che il vettore v individua con la tangente resta invariato.
La funzione $h(s,t) = t$ è un integrale primo del moto.
La mappa F ha la forma $F(s,t) = (s+2t, t)$.

Il biliardo circolare



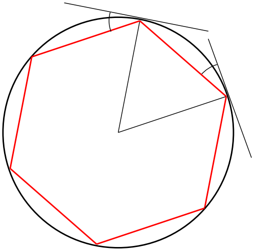
L'angolo che il vettore v individua con la tangente resta invariato.
La funzione $h(s,t) = t$ è un integrale primo del moto.
La mappa F ha la forma $F(s,t) = (s + 2t, t)$.

Il biliardo circolare



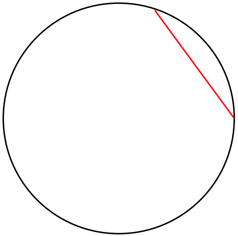
L'angolo che il vettore v individua con la tangente resta invariato.
La funzione $h(s, t) = t$ è un integrale primo del moto.
La mappa F ha la forma $F(s, t) = (s + 2t, t)$.

Il biliardo circolare

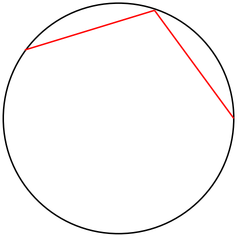


L'angolo che il vettore v individua con la tangente resta invariato.
La funzione $h(s,t) = t$ è un integrale primo del moto.
La mappa F ha la forma $F(s,t) = (s + 2t, t)$.

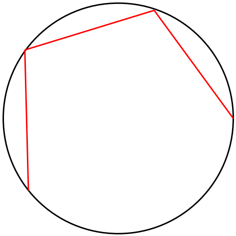
Il biliardo circolare



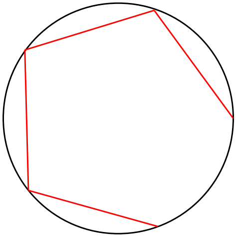
Il biliardo circolare



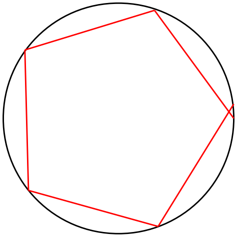
Il biliardo circolare



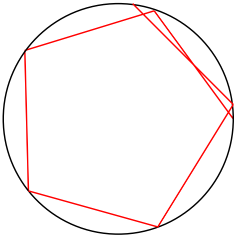
Il biliardo circolare



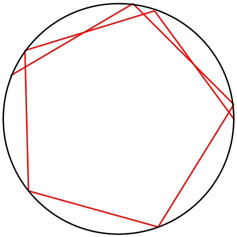
Il biliardo circolare



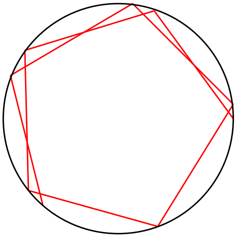
Il biliardo circolare



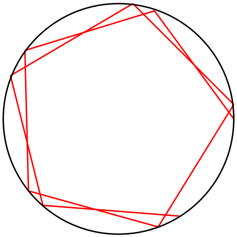
Il biliardo circolare



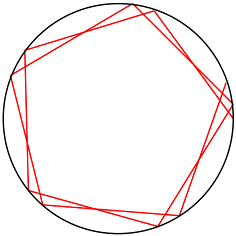
Il biliardo circolare



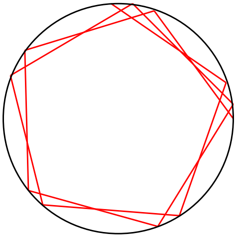
Il biliardo circolare



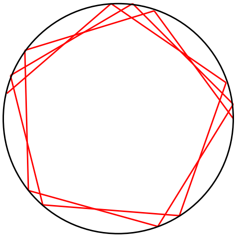
Il biliardo circolare



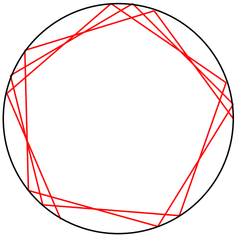
Il biliardo circolare



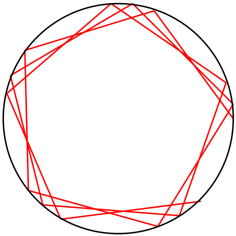
Il biliardo circolare



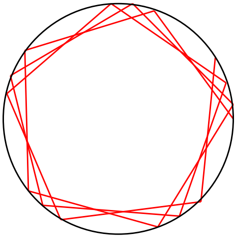
Il biliardo circolare



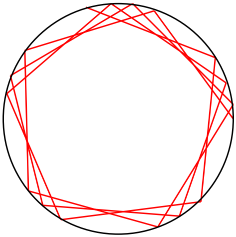
Il biliardo circolare



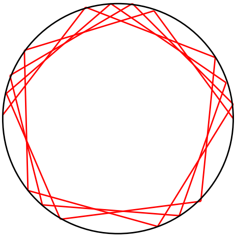
Il biliardo circolare



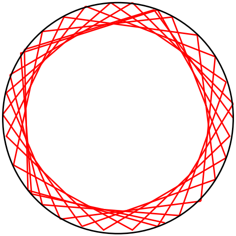
Il biliardo circolare



Il biliardo circolare

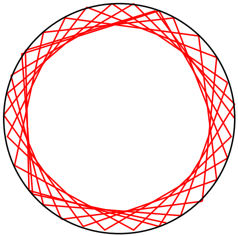


Il biliardo circolare



Per quali angoli inziali t otteniamo un'orbita periodica?

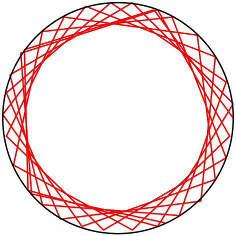
Il biliardo circolare



Per quali angoli inziali t otteniamo un'orbita periodica?

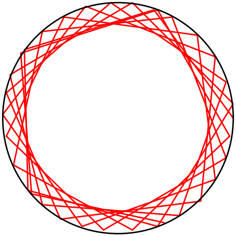
L'iterata q-esima della mappa F è $F^q(s,t) = (s + 2qt, t)$. Lo stato $(s + 2qt, t)$ coincide con lo stato iniziale (s, t) se e solo se $2qt$ è un multiplo intero di 2π.

Il biliardo circolare



Per quali angoli inziali t otteniamo un'orbita periodica?
L'iterata q-esima della mappa F è $F^q(s,t) = (s + 2qt, t)$. Lo stato $(s + 2qt, t)$ coincide con lo stato iniziale (s,t) se e solo se $2qt$ è un multiplo intero di 2π.
Ossia, se e solo se $2qt = 2p\pi$ con p intero, ossia $t = \frac{p}{q}\pi$: l'orbita è periodica se e solamente se l'angolo t è un multiplo razionale di π.

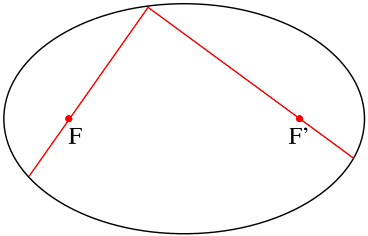
Il biliardo circolare



Per quali angoli inziali t otteniamo un'orbita periodica?
L'iterata q-esima della mappa F è $F^q(s,t) = (s + 2qt, t)$. Lo stato $(s + 2qt, t)$ coincide con lo stato iniziale (s,t) se e solo se $2qt$ è un multiplo intero di 2π.
Ossia, se e solo se $2qt = 2p\pi$ con p intero, ossia $t = \frac{p}{q}\pi$: l'orbita è periodica se e solamente se l'angolo t è un multiplo razionale di π.
Se t è un multiplo irrazionale di π allora l'insieme dei punti di rimbalzo è denso nella sponda.

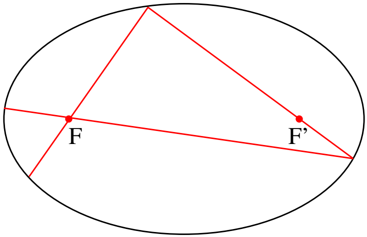
Biliardi ellittici

In un biliardo ellittico, un'orbita che passa per un fuoco dopo il rimbalzo passa per l'altro fuoco.



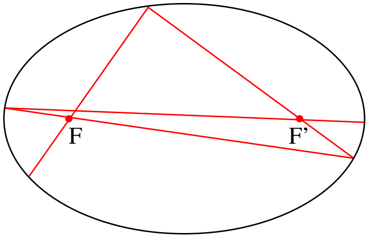
Biliardi ellittici

In un biliardo ellittico, un'orbita che passa per un fuoco dopo il rimbalzo passa per l'altro fuoco.

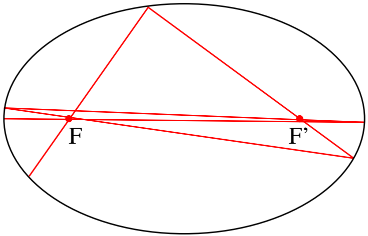


Biliardi ellittici

In un biliardo ellittico, un'orbita che passa per un fuoco dopo il rimbalzo passa per l'altro fuoco.

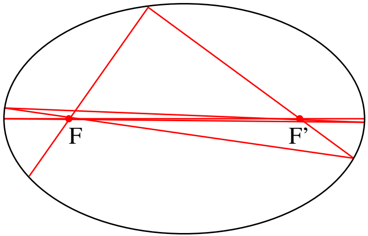


In un biliardo ellittico, un'orbita che passa per un fuoco dopo il rimbalzo passa per l'altro fuoco.



Biliardi ellittici

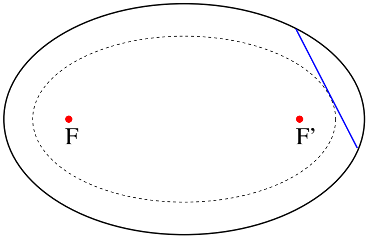
In un biliardo ellittico, un'orbita che passa per un fuoco dopo il rimbalzo passa per l'altro fuoco.



Tale orbita tende ad avvicinarsi sempre di più all'asse maggiore dell'ellisse.

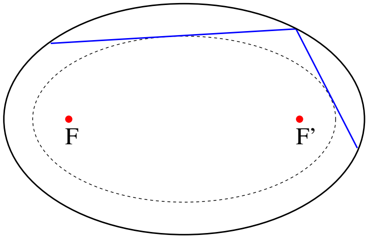
Biliardi ellittici

Più in generale, un'orbita tangente ad un ellisse confocale resta ad esso tangente.



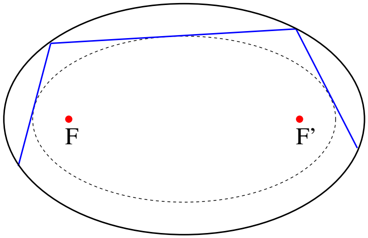
Biliardi ellittici

Più in generale, un'orbita tangente ad un ellisse confocale resta ad esso tangente.



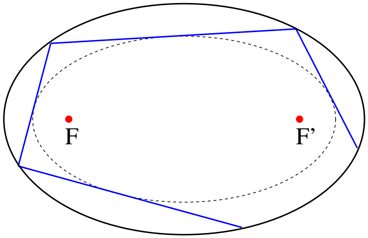
Biliardi ellittici

Più in generale, un'orbita tangente ad un ellisse confocale resta ad esso tangente.



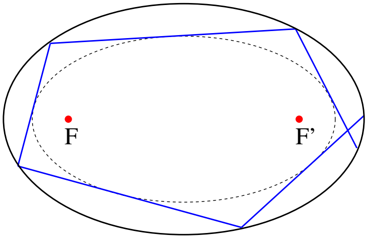
Biliardi ellittici

Più in generale, un'orbita tangente ad un ellisse confocale resta ad esso tangente.



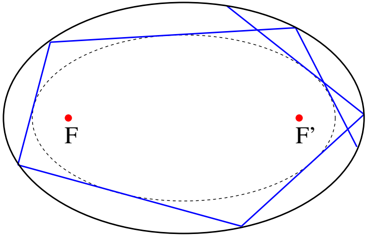
Biliardi ellittici

Più in generale, un'orbita tangente ad un ellisse confocale resta ad esso tangente.



Biliardi ellittici

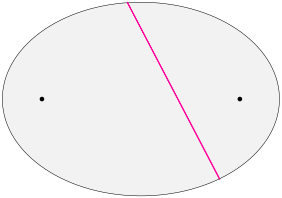
Più in generale, un'orbita tangente ad un ellisse confocale resta ad esso tangente.



Tutte le traiettorie che non passano tra i due fuochi sono di questo tipo.

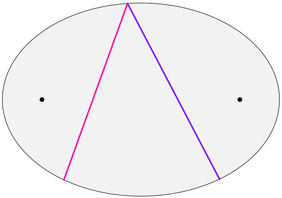
Biliardi ellittici

Come si comporta un'orbita che passa tra i due fuochi?



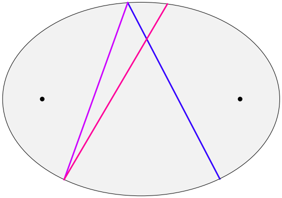
Biliardi ellittici

Come si comporta un'orbita che passa tra i due fuochi?



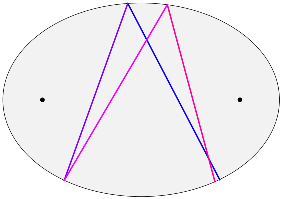
Biliardi ellittici

Come si comporta un'orbita che passa tra i due fuochi?



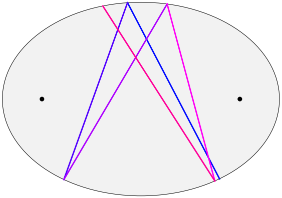
Biliardi ellittici

Come si comporta un'orbita che passa tra i due fuochi?



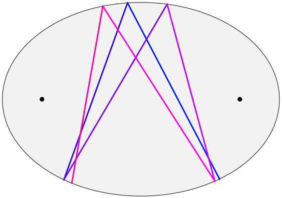
Biliardi ellittici

Come si comporta un'orbita che passa tra i due fuochi?



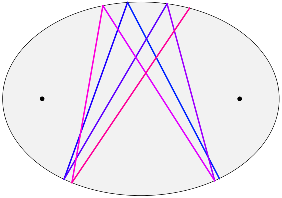
Biliardi ellittici

Come si comporta un'orbita che passa tra i due fuochi?



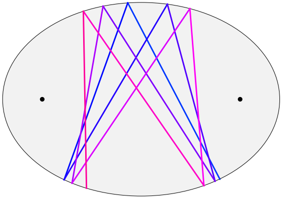
Biliardi ellittici

Come si comporta un'orbita che passa tra i due fuochi?



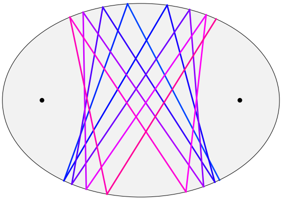
Biliardi ellittici

Come si comporta un'orbita che passa tra i due fuochi?



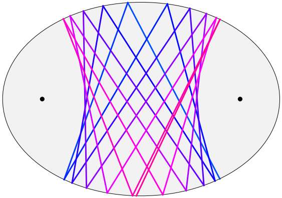
Biliardi ellittici

Come si comporta un'orbita che passa tra i due fuochi?



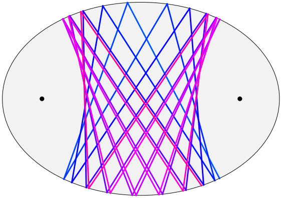
Biliardi ellittici

Come si comporta un'orbita che passa tra i due fuochi?



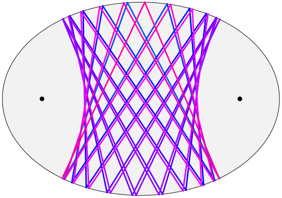
Biliardi ellittici

Come si comporta un'orbita che passa tra i due fuochi?



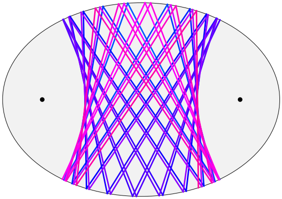
Biliardi ellittici

Come si comporta un'orbita che passa tra i due fuochi?



Biliardi ellittici

Come si comporta un'orbita che passa tra i due fuochi?



L'orbita resta tangente ad una stessa iperbole avente per fuochi i due fuochi dell'ellisse.

Integrabilità

Le ellissi e le iperboli aventi come fuochi F e F' appartengono ad una famiglia di curve parametrizzate da un parametro λ:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1.$$

Integrabilità

Le ellissi e le iperboli aventi come fuochi F e F' appartengono ad una famiglia di curve parametrizzate da un parametro λ:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1.$$

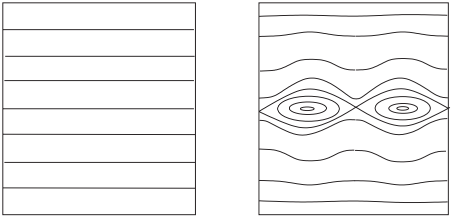
La funzione che ad uno stato (s,t) associa il valore di λ corrispondente alla curva alla quale l'orbita di (s,t) è tangente è un integrale del moto.

Integrabilità

Le ellissi e le iperboli aventi come fuochi F e F' appartengono ad una famiglia di curve parametrizzate da un parametro λ:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1.$$

La funzione che ad uno stato (s,t) associa il valore di λ corrispondente alla curva alla quale l'orbita di (s,t) è tangente è un integrale del moto.



Ogni biliardo possiede un integrale del moto?

Ogni biliardo possiede un integrale del moto?

No. Anzi, quelli che lo possiedono sono in certo senso eccezionali.

Ogni biliardo possiede un integrale del moto?

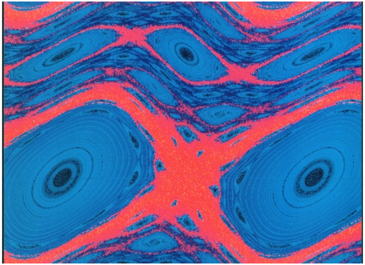
No. Anzi, quelli che lo possiedono sono in certo senso eccezionali.

La transizione dai biliardi integrabili al chaos è descritta dalla teoria KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) e dalla teoria di Aubry-Mather.

Ogni biliardo possiede un integrale del moto?

No. Anzi, quelli che lo possiedono sono in certo senso eccezionali.

La transizione dai biliardi integrabili al chaos è descritta dalla teoria KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) e dalla teoria di Aubry-Mather.



Ricorrenza di Poincaré

La mappa biliardo conserva l'area (nelle variabili s, $r = \cos t$):

$$\mathrm{area}(F(A)) = \mathrm{area}(A), \quad \forall A \subset X.$$

Ricorrenza di Poincaré

La mappa biliardo conserva l'area (nelle variabili s, $r = \cos t$):

$$\text{area}(F(A)) = \text{area}(A), \quad \forall A \subset X.$$

Teorema di ricorrenza di Poincaré. Supponiamo che lo spazio delle fasi X abbia area finita e che $F : X \to X$ conservi l'area. Allora l'evoluzione temporale di un qualunque insieme $A \subset X$ di area positiva prima o poi interseca A stesso.

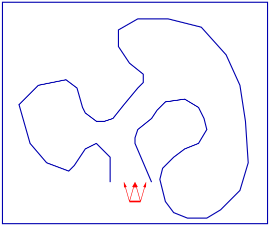
Ricorrenza di Poincaré

La mappa biliardo conserva l'area (nelle variabili s, $r = \cos t$):

$$\text{area}(F(A)) = \text{area}(A), \quad \forall A \subset X.$$

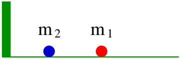
Teorema di ricorrenza di Poincaré. Supponiamo che lo spazio delle fasi X abbia area finita e che $F : X \to X$ conservi l'area. Allora l'evoluzione temporale di un qualunque insieme $A \subset X$ di area positiva prima o poi interseca A stesso.

Conseguenza: Non è possibile intrappolare un fascio di luce che provenga da una sorgente estesa e che parta con direzione che varia in un angolo di ampiezza positiva.



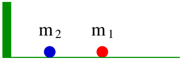
Rimbalzi

Due palline di massa m_1 e m_2 vincolate a muoversi su una semiretta, limitata da un muro.



Rimbalzi

Due palline di massa m_1 e m_2 vincolate a muoversi su una semiretta, limitata da un muro.

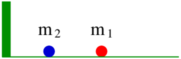


Chiamiamo x_1 l'ascissa della pallina lontana dal muro, x_2 l'ascissa di quella vicina al muro. Riscaliamo:

$$s_1 = \sqrt{m_1} x_1, \quad s_2 = \sqrt{m_2} x_2.$$

Rimbalzi

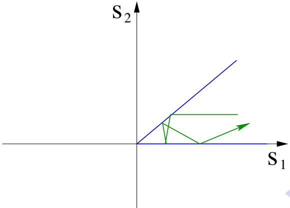
Due palline di massa m_1 e m_2 vincolate a muoversi su una semiretta, limitata da un muro.



Chiamiamo x_1 l'ascissa della pallina lontana dal muro, x_2 l'ascissa di quella vicina al muro. Riscaliamo:

$$s_1 = \sqrt{m_1} x_1, \quad s_2 = \sqrt{m_2} x_2.$$

Il moto delle due palline è descritto da un punto nel piano cartesiano s_1, s_2 confinato in un biliardo a forma di settore di angolo $\theta = \arctan \sqrt{m_2/m_1}$.



Gas di Sinai

Modelliziamo un gas come un insieme di sfere rigide che si muovono liberamente in un contenitore e rimbalzano elasticamente.

Gas di Sinai

Modelliziamo un gas come un insieme di sfere rigide che si muovono liberamente in un contenitore e rimbalzano elasticamente.

- Due sole sfere.

Gas di Sinai

Modelliziamo un gas come un insieme di sfere rigide che si muovono liberamente in un contenitore e rimbalzano elasticamente.

- Due sole sfere.
- Il contenitore non ha pareti.

Gas di Sinai

Modelliziamo un gas come un insieme di sfere rigide che si muovono liberamente in un contenitore e rimbalzano elasticamente.

- Due sole sfere.
- Il contenitore non ha pareti.

Se i vettori u_1 e u_2 indicano la posizione dei centri delle due sfere, fissiamo il centro di massa e consideriamo $v = u_2 - u_1$.

Gas di Sinai

Modelliziamo un gas come un insieme di sfere rigide che si muovono liberamente in un contenitore e rimbalzano elasticamente.

- Due sole sfere.
- Il contenitore non ha pareti.

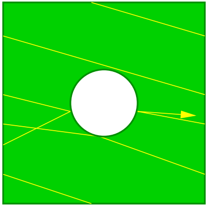
Se i vettori u_1 e u_2 indicano la posizione dei centri delle due sfere, fissiamo il centro di massa e consideriamo $v = u_2 - u_1$.
Se le due sfere hanno raggio r, il vettore v ha sempre lunghezza almeno $2r$.

Gas di Sinai

Modelliziamo un gas come un insieme di sfere rigide che si muovono liberamente in un contenitore e rimbalzano elasticamente.

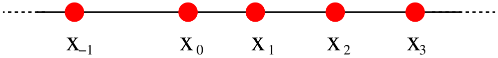
- Due sole sfere.
- Il contenitore non ha pareti.

Se i vettori u_1 e u_2 indicano la posizione dei centri delle due sfere, fissiamo il centro di massa e consideriamo $v = u_2 - u_1$.
Se le due sfere hanno raggio r, il vettore v ha sempre lunghezza almeno $2r$.
Il sistema è equivalente ad un biliardo su un toro con un buco circolare di raggio $2r$, noto come biliardo di Sinai.



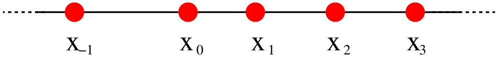
Modello di Frenkel-Kontorova

Modelliziamo un cristallo lineare come infiniti atomi disposti lungo una retta:



Modello di Frenkel-Kontorova

Modelliziamo un cristallo lineare come infiniti atomi disposti lungo una retta:



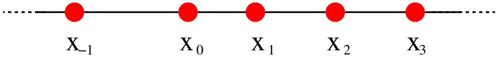
L'atomo h-esimo ha ascissa x_h ed interagisce con i due vicini. Il sistema cerca di minimizzare l'energia totale:

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}} h(x_h, x_{h+1}),$$

$$\text{dove} \quad h(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2 + K \sin^2 x, \quad K > 0.$$

Modello di Frenkel-Kontorova

Modelliziamo un cristallo lineare come infiniti atomi disposti lungo una retta:



L'atomo h-esimo ha ascissa x_h ed interagisce con i due vicini. Il sistema cerca di minimizzare l'energia totale:

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}} h(x_h, x_{h+1}),$$

$$\text{dove} \quad h(x,y) = \frac{1}{2}|x-y|^2 + K \sin^2 x, \quad K > 0.$$

Le configurazioni minimizzanti $(\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$ sono in corrispondenza biunivoca con le orbite

$$\ldots, (x_{-2}, x_{-1}), (x_{-1}, x_0), (x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots$$

di una particolare mappa biliardo.

Per saperne di più

- S. Tabachnikov, *Geometry and Biliards*, American Mathematical Society 2005.
  http://www.math.psu.edu/tabachni/

Per saperne di più

- S. Tabachnikov, *Geometry and Biliards*, American Mathematical Society 2005.
  http://www.math.psu.edu/tabachni/

- A. Katok e B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press 1995.

Per saperne di più

- S. Tabachnikov, *Geometry and Biliards*, American Mathematical Society 2005.
  http://www.math.psu.edu/tabachni/
- A. Katok e B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press 1995.
- Wolfram Demostrations Project.
  http://demonstrations.wolfram.com/