Corso di Laurea in MATEMATICA
Anno Accademico 2004-05

Programma del corso di
Geometria e Topologia Differenziale

Prof. Marco Abate

1) Curve. Il concetto di curva. Curve come sottovarietà 1-dimensionali di $\mathbb{R}^n$: sono diffeomorfe a $\mathbb{R}$ o a S^1. Curve parametrizzate. Parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco. Curvatura di una curva regolare; curvatura orientata di una curva piana. Torsione di una curva nello spazio. Formule di Frenet-Serret. Teorema fondamentale della teoria locale delle curve nello spazio. Indice di avvolgimento di una curva chiusa piana. Teorema di Jordan per curve regolari. Indice di rotazione di una curva piana. Teorema delle tangenti di Hopf.

2) Superfici in $\mathbb{R}^3$. Definizione di superficie. Ogni superficie è localmente un grafico. Le immagini inverse di valori regolari sono superfici. Funzioni C^∞ e applicazioni C^∞ fra superfici. Vettori tangenti e piano tangente. Differenziale. Orientabilità.

Prima forma fondamentale. Isometrie e isometrie locali. Mappa di Gauss. Curvatura normale. Seconda forma fondamentale. Curvature principali, gaussiana e media. Punti ellittici, iperbolici, parabolici, planari e ombelicali. Linee di curvatura. Simboli di Christoffel. Equazioni di Gauss e di Codazzi-Mainardi. Teorema egregium di Gauss. Teorema fondamentale della teoria locale delle superfici (Teorema di Bonnet: senza dimostrazione).

Campi vettoriali. Flusso e integrali primi. Parametrizzazioni ortogonali. Derivata covariante lungo una curva. Campi paralleli. Geodetiche. Proprietà di minimizzazione locale della distanza delle geodetiche (senza dimostrazione). Curvatura geodetica.

Il Teorema di Gauss-Bonnet locale. Triangolazioni (senza dimostrazioni). La caratteristica di Eulero-Poincaré. Il Teorema di Gauss-Bonnet globale. L'indice di un campo vettoriale in un punto singolare isolato. Il Teorema di Poincaré-Hopf sulla somma degli indici.

Bibliografia

– M. Abate, Appunti del corso, 2005.
– M.P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces,* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1976.

Modalità d'esame.

L'esame si compone di una parte scritta e una parte orale. L'ammissione alla prova orale si ottiene o avendo superato con esito almeno sufficiente i tre compitini svolti durante il semestre oppure superando con esito almeno sufficiente una prova scritta. L'ammissione alla prova orale rimane valida per tutti gli appelli dell'A.A. 2004/05. Nel momento in cui viene consegnato uno scritto, viene cancellata la storia precedente: per l'ammissione all'orale viene tenuto presente solo l'ultimo risultato ottenuto. Analogamente, nella sventurata ipotesi in cui uno studente non superasse la prova orale, per poterla ripetere deve prima superare nuovamente una prova scritta.

Argomenti propedeutici.

Essenziale per la comprensione del corso è una buona conoscenza del calcolo differenziale e integrale di una variabile reale (come trattato nel corso di *Elementi di Analisi Matematica*), del calcolo differenziale di più variabili reali (come trattati nei corsi di *Calcolo Differenziale,* e di *Integrazione*), dell'algebra lineare (come trattata nel corso di *Geometria Analitica e Algebra Lineare*), e delle basi di topologia generale e della teoria dei rivestimenti (come trattate nei corsi di *Geometria Proiettiva* e di *Topologia e Analisi Complessa*).