

Programma del corso di Geometria e Topologia Differenziale

Prof. Marco Abate

1) Curve. Il concetto di curva. Curve come sottovarietà 1-dimensionali di \mathbb{R}^n : sono diffeomorfe a \mathbb{R} o a S^1 . Curve parametrizzate. Parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco. Curvatura di una curva regolare; curvatura orientata di una curva piana. Torsione di una curva nello spazio. Formule di Frenet-Serret. Teorema fondamentale della teoria locale delle curve nello spazio. Indice di avvolgimento di una curva chiusa piana. Teorema di Jordan per curve regolari. Indice di rotazione di una curva piana. Teorema delle tangenti di Hopf.

2) Superfici in \mathbb{R}^3 . Definizione di superficie. Ogni superficie è localmente un grafico. Le immagini inverse di valori regolari sono superfici. Funzioni C^∞ e applicazioni C^∞ fra superfici. Vettori tangenti e piano tangente. Differenziale. Orientabilità.

Prima forma fondamentale. Isometrie e isometrie locali. Mappa di Gauss. Curvatura normale. Seconda forma fondamentale. Curvature principali, gaussiana e media. Punti ellittici, iperbolici, parabolici, planari e ombelicali. Linee di curvatura. Simboli di Christoffel. Equazioni di Gauss e di Codazzi-Mainardi. Teorema egregium di Gauss. Teorema fondamentale della teoria locale delle superfici (Teorema di Bonnet: senza dimostrazione).

Campi vettoriali. Flusso e integrali primi. Parametrizzazioni ortogonali. Derivata covariante lungo una curva. Campi paralleli. Geodetiche. Mappa esponenziale. Coordinate polari geodetiche. Proprietà di minimizzazione locale della distanza delle geodetiche. Curvatura geodetica.

Il Teorema di Gauss-Bonnet locale. Triangolazioni (senza dimostrazioni). La caratteristica di Eulero-Poincaré. Il Teorema di Gauss-Bonnet globale. L'indice di un campo vettoriale in un punto singolare isolato. Il Teorema di Poincaré-Hopf sulla somma degli indici.

3) Varietà differenziabili. Definizione di varietà differenziabile. Esempi. Funzioni differenziabili e applicazioni differenziabili fra varietà. Spazio tangente. Sottovarietà. Campi vettoriali. Parentesi di Lie. Curve integrali. Distribuzioni completamente integrabili e involutive. Teorema di Frobenius.

Bibliografia

- M. Abate, Appunti del corso, 2002.
- M.P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1976.