

ANNO ACCADEMICO 2014–15  
SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

**MATEMATICA**  
**TERZO SCRITTO**

PROFF. MARCO ABATE E ROSETTA ZAN

21 settembre 2015

Nome e cognome \_\_\_\_\_

Matricola \_\_\_\_\_

**ISTRUZIONI:** Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

*Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!*

PRIMA PARTE

**Esercizio 1.** Individua l'insieme immagine della funzione  $f$  data da

$$f(x) = \arctan e^x .$$

**Esercizio 2.** Calcola l'area della regione di piano delimitata dall'asse delle ascisse e dal grafico della funzione  $f(t) = \log t$  nell'intervallo  $[e^{-1}, e]$ .

**Esercizio 3.** Scrivi un vettore di lunghezza 1 ortogonale al piano di equazione  $2x - y + 3z = 1$ .

SECONDA PARTE

**Esercizio 4.** Trova un esempio

- (i) di una funzione  $f$  dispari definita e continua su tutto  $\mathbb{R}$ , con  $f(0) = 0$ , e tale che la retta tangente al suo grafico in  $x = 0$  abbia equazione  $y = 2x$ ;
- (ii) di una funzione  $g$  definita e continua su tutto  $\mathbb{R}$  che abbia come insieme immagine l'intervallo  $[1, \pi)$ ;
- (iii) di una funzione  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $h(0) = 2$  e periodica di periodo 6.

**Esercizio 5.** Hai deciso di aprire un allevamento di cani da corsa, cominciando con una popolazione iniziale di 4 cani. I tuoi studi etologici ti assicurano che il numero  $C(t)$  di cani nella tua popolazione al tempo  $t$ , misurato in mesi, soddisfa l'equazione differenziale

$$C' = 16C - 2C^2 .$$

- (i) Risolvi il problema di Cauchy trovando l'espressione della funzione  $C$ .
- (ii) Studia la funzione  $C$ , anche per tempi negativi.
- (iii) Per poter partecipare a un'intera stagione di corse di cani, hai bisogno di una popolazione di 10 cani. Il tuo allevamento potrà mai partecipare a una stagione di corse? Se sì, dopo quanto tempo? Se no, qual è il massimo numero di cani che il tuo allevamento potrà mai avere?

**Esercizio 6.** Trova, al variare dei parametri  $h, k \in \mathbb{R}$ , la mutua posizione fra il piano di equazione  $kx - 2z = h$ , e la retta  $r$  passante per il punto  $A = (0, 1, 1)$  e ortogonale al piano di equazione  $x - y + z = 0$ .