

ANNO ACCADEMICO 2014–15  
SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI  
**MATEMATICA**  
**PRIMO SCRITTO — TESTO A**  
PROFF. MARCO ABATE E ROSETTA ZAN

8 giugno 2015

Nome e cognome \_\_\_\_\_

Matricola \_\_\_\_\_

**ISTRUZIONI:** Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

*Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!*

PRIMA PARTE

**Esercizio 1.** Determina, motivando la risposta, se la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  data da

$$f(x) = e^{\arctan(x^3+2)}$$

è iniettiva.

**Esercizio 2.** Calcola il seguente integrale definito:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (3x^2 + 2) \sin x \, dx .$$

**Esercizio 3.** Scrivi un esempio di un sistema lineare di tre equazioni in due incognite che ammetta una retta di soluzioni.

SECONDA PARTE

**Esercizio 4.** Trova un esempio

- (i) di una funzione definita su tutto  $\mathbb{R}$ , periodica di periodo 3, e avente valore minimo pari a 2;
- (ii) di una funzione definita su tutto  $\mathbb{R}$  e discontinua in  $x_0 = \sqrt{3}$ ;
- (iii) di una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , decrescente, sempre positiva, con  $f(0) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ .

**Esercizio 5.** Nella chimica computazionale, l'energia potenziale  $V(r)$  dell'interazione fra due atomi a distanza  $r$  viene spesso espressa dalla legge di Lennard-Jones:

$$V(r) = a \left( \left( \frac{\rho}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\rho}{r} \right)^6 \right),$$

dove  $a, \rho > 0$  sono dei parametri dipendenti dai specifici atomi considerati.

- (i) Studia la funzione  $V$ , anche per valori negativi di  $r$ , supponendo  $a = 10$  e  $\rho = 2$ .
- (ii) La forza  $F$  che lega i due atomi si ricava dall'energia potenziale tramite la formula  $F = -V'$ . Determina se esiste un valore  $r_0$  di  $r$  per cui la forza si annulla. Quando  $0 < r < r_0$ , gli atomi si attraggono o si respingono? E quando  $r > r_0$ ?

**Esercizio 6.** Determina, al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$ , la mutua posizione fra la retta  $r$  passante per i punti  $A = (0, 1, 2)$  e  $B = (1, 0, 0)$  e il piano di equazione  $x + 2kz = 0$ .