Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Terzo scritto A.A. 2015/16 — 14 settembre 2016

Nome e Cognome:

---

1) Sia $\iota: S \hookrightarrow M$ una sottovarietà embedded chiusa. Dimostra che per ogni $f \in C^\infty(S)$ e ogni intorno aperto U di S in M esiste una $\tilde{f} \in C^\infty(U)$ tale che $\tilde{f}|_S \equiv f$.

2) Sia M una n-varietà compatta, connessa e orientata, e $i: S \hookrightarrow M$ una k-sottovarietà embedded orientata chiusa. In questo esercizio puoi dare per nota la dualità di Poincaré anche per varietà non compatte.

(i) Dimostra che si può indurre un funzionale lineare $\int_S: H^k(M) \to \mathbb{R}$ associando a ogni $\eta \in A^k(M)$ l'integrale $\int_S i^*\eta$.

(ii) Dimostra che esiste un'unica classe $[\omega_S] \in H^{n-k}(M)$ tale che

$$\int_S i^*\eta = \int_M \eta \wedge \omega_S$$

per ogni rappresentante $\omega_S \in Z^{n-k}(M)$ di $[\omega_S]$ e ogni k-forma chiusa $\eta \in Z^k(M)$.

(iii) Se $\omega_S \in Z^{n-k}(M)$ è un rappresentante di $[\omega_S]$, dimostra che $\omega_S|_{M \setminus S}$ è esatta in $M \setminus S$.

3) Sia (M, g) una varietà Riemanniana con connessione di Levi-Civita ∇. Data $\phi \in C^\infty(M)$, poniamo $\tilde{g} = e^\phi g$, e sia $\tilde{\nabla}$ la connessione di Levi-Civita di $(M, \tilde{g})$.

(i) Sia $\sigma: I \to M$ una ∇-geodetica. Dimostra che σ è anche una $\tilde{\nabla}$-geodetica se e solo se $X(\phi) \circ \sigma \equiv 0$ per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$.

(ii) Dimostra che ogni ∇-geodetica è anche una $\tilde{\nabla}$-geodetica se e solo se ϕ è costante su ogni componente connessa di M.