Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Terzo scritto A.A. 2014/15 — 1 settembre 2015

Nome e Cognome:

---

1) Per ogni $a \in [0,1]$, considera la funzione $f_a\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) = \big((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 - (x^5)^2 - 1, (1-a)x^4 + ax^5\big) .$$

(i) Dimostra che, per ogni $a \in [0,1]$, l'insieme $V_a = f_a^{-1}(0,0)$ è una sottovarietà 3-dimensionale di $\mathbb{R}^5$.
(ii) Dimostra che V_0 è diffeomorfa a $V_{1/2}$.
(iii) Dimostra che V_0 e V_1 non sono omotopicamente equivalenti (tramite un'equivalenza omotopica liscia).

2) Sia $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ un rivestimento liscio a k fogli di n-varietà, con $k \in \mathbb{N}$. Supponi che sia M sia $\widetilde{M}$ siano orientate, e che π conservi l'orientazione. Dimostra che

$$\int_{\widetilde{M}} \pi^*\omega = k \int_M \omega$$

per ogni n-forma $\omega \in A^n(M)$ a supporto compatto.

3) Sia M una varietà Riemanniana con metrica g e connessione di Levi-Civita ∇, sia $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale su M, e indichiamo con $\Theta\colon \mathcal{U} \to M$ il flusso di X. Dati due campi Y, $Z \in \mathcal{T}(M)$, prendi $t_0 > 0$, $p \in \mathcal{U}_{t_0}$ e considera le funzioni f, $h\colon [0, t_0] \to \mathbb{R}$ date da

$$h(t) = g_p\big(d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y), d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Z)\big) , \quad f(t) = g_{\theta_t(p)}(Y_{\theta_t(p)}, Z_{\theta_t(p)}) ,$$

dove come al solito $\theta_t(p) = \Theta(t,p)$.

(i) Mostra che $h'(0) = g_p([X,Y], Z) + g_p(Y, [X,Z])$ e che $f'(0) = g_p(\nabla_X Y, Z) + g_p(Y, \nabla_X Z)$.

Diremo che X è un *K-campo* se l'applicazione $d(\theta_t)_p\colon T_pM \to T_{\theta_t(p)}M$ è un'isometria per ogni $t \in \mathbb{R}$ e ogni $p \in \mathcal{U}_t$.

(ii) Dimostra che, se X è un K-campo, allora $g_p(\nabla_Y X, Z) + g_p(\nabla_Z X, Y) = 0$ per ogni Y, $Z \in \mathcal{T}(M)$.
(iii) Sia ora $M = \mathbb{R}^2$ dotato dell'usuale metrica Euclidea, e sia B una matrice 2×2 a coefficienti reali. Definiamo il campo $X_B \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ ponendo $X_B(x) = Bx$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ (stiamo sottintendendo l'usuale identificazione di $T_p\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{R}^2$ per ogni $p \in \mathbb{R}^2$, dovuta al fatto che $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale). Dimostra che X_B è un K-campo se e solo se B è antisimmetrica. [*Suggerimento:* per trovare il flusso di X utilizza l'esponenziale di matrici.]