Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Sesto scritto A.A. 2012/13 — 6 febbraio 2014

Nome e Cognome:

---

1) Sia $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale su una varietà M, e indichiamo con Θ il suo flusso.

(i) Se $\omega \in A^1(M)$ è una 1-forma differenziale, dimostra che ponendo

$$(\mathcal{L}_X\omega)_p = \frac{d}{dt}(\theta_t^*\omega)_p\bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\theta_t^*(\omega_{\theta_t(p)}) - \omega_p}{t}$$

per ogni $p \in M$ si definisce una 1-forma differenziale $\mathcal{L}_X\omega \in A^1(M)$.

(ii) Dimostra che $\mathcal{L}_X\colon A^1(M) \to A^1(M)$ è $\mathbb{R}$-lineare, e che è un'operatore locale nel senso che se $p \in M$ ha un intorno $U \subseteq M$ tale che $\omega|_U \equiv O$ allora $(\mathcal{L}_X\omega)_p = O$.

(iii) Dimostra che per ogni $f \in C^\infty(M)$ e $\omega \in A^1(M)$ si ha

$$\mathcal{L}_X(f\omega) = X(f)\omega + f\mathcal{L}_X\omega\ .$$

(iv) Per ogni $f \in C^\infty(M)$ dimostra che $\mathcal{L}_X(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}\big(X(f)\big)$.

(v) Dimostra che per ogni $\omega \in A^1(M)$ e ogni $Y \in \mathcal{T}(M)$ si ha

$$(\mathcal{L}_X\omega)(Y) = X\big(\omega(Y)\big) - \omega(\mathcal{L}_XY) = \mathrm{d}\omega(X,Y) + Y\big(\omega(X)\big)\ .$$

2) Sia M una varietà differenziabile compatta, connessa e orientabile di dimensione $n \ge 2$, sia p un qualsiasi punto di M, e sia $M' = M \setminus \{p\}$.

(i) Mostra che $H^k(M) \cong H^k(M')$ per ogni $k \le n-1$, e che $H^k(M') = 0$ per ogni $k \ge n$. [*Suggerimento:* puoi dare per noto che l'n-esimo gruppo di coomologia di una n-varietà connessa orientabile è isomorfo a $\mathbb{R}$ se la varietà è compatta, a (O) se la varietà non è compatta.]

(ii) Nel caso in cui $M = S^2 \times S^2$, calcola $H^k(M')$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

(iii) Mostra che, se $M = S^2 \times S^2$, allora M' non si retrae per deformazione su alcuna sottovarietà compatta orientabile di M.

3) Su $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$, considera l'usuale metrica Riemanniana indotta dalla struttura Euclidea di $\mathbb{R}^4$. Sia $n \ge 2$ un intero fissato, e considera la funzione $R_n\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da $R_n(x) = A_n \cdot x$, dove

$$A_n = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) & 0 & 0 \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ 0 & 0 & \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}$$

(i) Mostra che la restrizione di R_n a S^3 definisce un'isometria di S^3 in sé.

Sia $X = S^3/\sim$, dove $x \sim y$ se e solo se esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $y = R_n^k(x)$.

(ii) Dimostra che X ammette una struttura di varietà Riemanniana tale che la proiezione al quoziente $\pi\colon S^3 \to X$ sia un'isometria locale.

(iii) Dimostra che ogni geodetica $\gamma\colon \mathbb{R} \to X$ è periodica, ovvero esiste $T_0 > 0$ tale che $\gamma(t) = \gamma(t+T_0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. [*Suggerimento:* ricorda che per ogni $p \in S^3$ e $v \in T_pS^3$ la curva $\gamma(t) = (\cos t)p + (\sin t)v$ è la geodetica di S^3 uscente da p tangente alla direzione v, dove stiamo identificando T_pS^3 con il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ ortogonale a p rispetto al prodotto scalare canonico.]

(iv) Trova una geodetica $\gamma\colon [0,1] \to X$ non costante tale che $\gamma(0) = \gamma(1)$ e di lunghezza strettamente minore di 2π.