Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Quarto scritto A.A. 2012/13 — 14 novembre 2013

Nome e Cognome:

---

1) Dato $a > 0$, considera il sottoinsieme $M_a \subseteq \mathbb{R}^5$ definito dalle equazioni

$$\begin{cases} (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 + (x^5)^2 = 1 \,, \\ (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = a \,. \end{cases}$$

(i) Dimostra che, se $a \neq 1$, allora M_a è una sottovarietà compatta 3-dimensionale di $\mathbb{R}^5$ (eventualmente vuota).

(ii) Dimostra che M_1 è una sottovarietà 1-dimensionale di $\mathbb{R}^5$, e che $M_a = \varnothing$ se $a > 1$.

(iii) Per $0 < a < 1$, calcola i gruppi di coomologia di de Rham di M_a.

2) Se $f\colon M \to N$ è un'applicazione differenziabile fra varietà, un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(M)$ si dice f-correlato a un campo vettoriale $Y \in \mathcal{T}(N)$ se $df_x\bigl(X(x)\bigr) = Y\bigl(f(x)\bigr)$ per ogni $x \in M$. Considera l'applicazione $p\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1 \times S^1$ data da

$$p(x) = \left(\frac{x}{\|x\|}, \bigl(\cos(2\pi \log_2 \|x\|), \sin(2\pi \log_2 \|x\|)\bigr) \right) \,.$$

(i) Dimostra che p è un diffeomorfismo locale surgettivo, e deducine che per ogni campo $Y \in \mathcal{T}(S^1 \times S^1)$ esiste un unico campo $p^*(Y) \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ tale che $p^*(Y)$ sia p-correlato a Y.

Sia $h\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definita da $h(x) = 2x$.

(ii) Dimostra che un campo X su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ è p-correlato a un qualche campo Y su $S^1 \times S^1$ se e solo se X è h-correlato a se stesso.

3) Sia ∇ una connessione lineare simmetrica su una varietà M.

(i) Data una curva $\sigma\colon I \to M$, dimostra che esiste un diffeomorfismo $h\colon J \to I$ tale che $\sigma \circ h$ è una geodetica per ∇ se e solo se esiste una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che in coordinate locali si abbia

$$(\sigma^j)'' + (\Gamma^j_{hk} \circ \sigma)(\sigma^h)'(\sigma^k)' = f \cdot (\sigma^j)'$$

per ogni $j = 1, \ldots, \dim M$. [*Suggerimento:* dimostra che data f si può sempre trovare un diffeomorfismo k tale che $f = k''/k'$.]

(ii) Sia $\varphi \in A^1(M)$ una 1-forma, e poniamo $\tilde{\nabla} = \nabla + \varphi \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \varphi$; in altre parole, per ogni $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ si ha $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \varphi(X)Y + \varphi(Y)X$. Dimostra che $\tilde{\nabla}$ è una connessione simmetrica, e che se $\sigma\colon I \to M$ è una geodetica per $\tilde{\nabla}$ allora esiste un diffeomorfismo $h\colon J \to I$ tale che $\sigma \circ h$ sia una geodetica per ∇.

(iii) Se esiste un diffeomorfismo $h\colon J \to I$ tale che $\sigma \circ h$ sia una geodetica per ∇, cosa si può dire su σ?