Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Terzo scritto A.A. 2013/14 — 5 settembre 2014

Nome e Cognome:

---

1) Considera l'insieme

$$S = \{(x^1, \ldots, x^4) \in \mathbb{R}^4 \mid x^1 x^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^4 ,$$

e sia $f: S \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x^1, x^2, x^3, x^4) = x^1 - x^2 .$$

(i) Mostra che S è una sottovarietà liscia 3-dimensionale di $\mathbb{R}^4$.
(ii) Mostra che la funzione f è priva di punti critici.
(iii) Mostra che, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'insieme $f^{-1}(a) \subset S$ è una sottovarietà liscia di S diffeomorfa a S^2.

2) Siano $\pi_E: E \to M$ e $\pi_F: F \to M$ due fibrati vettoriali, di rango rispettivamente r ed s, su una varietà M, e sia

$$E \oplus F = \bigcup_{p \in M} E_p \oplus F_p .$$

Dimostra che $E \oplus F$ ha una naturale struttura di fibrato vettoriale di rango $r + s$.

3) Sia (M, g) una varietà Riemanniana orientata n-dimensionale, con connessione di Levi-Civita ∇ e forma di volume Riemanniano ν_g.

(i) Fissate delle coordinate locali $(x^1, \ldots, x^n)$, dimostra che

$$\Gamma^k_{kj} = \frac{1}{2\det(g_{rs})} \frac{\partial \det(g_{rs})}{\partial x^j} ,$$

dove stiamo usando la convenzione di Einstein sulla somma sugli indici ripetuti, e (g_{rs}) è la matrice che rappresenta la metrica Riemanniana nelle coordinate locali. [*Suggerimento:* ricorda che la derivata del determinante di una matrice $A = (a_{rs})$ rispetto a un elemento a_{rs} è data da

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{rs}} = (-1)^{r+s} \det(A^{rs})$$

dove A^{rs} è la sottomatrice di A ottenuta cancellando la riga r-esima e la colonna s-esima, e ricorda la formula per esprimere l'elemento a^{rs} della matrice inversa di A in termini di A^{rs}.]

(ii) Dato un campo vettoriale $Z \in \mathcal{T}(M)$, dimostra che

$$\mathrm{d}(\iota_Z \nu_g) = \mathrm{div}(Z) \nu_g ,$$

dove $\iota_Z: A^n(M) \to A^{n-1}(M)$ è la moltiplicazione interna definita da

$$(\iota_Z \omega)(Y_1, \ldots, Y_{n-1}) = \omega(Z, Y_1, \ldots, Y_{n-1}) ,$$

e $\mathrm{div}(Z): M \to \mathbb{R}$ è la divergenza di Z, definita da $\mathrm{div}(Z) = \mathcal{C}^1_1(\nabla Z)$.

Nel resto di questo esercizio sia $\Omega \subset M$ un aperto connesso a chiusura compatta con bordo regolare, per cui $\partial\Omega$ è una sottovarietà connessa compatta $(n-1)$-dimensionale di M. Su $\partial\Omega$ mettiamo la metrica Riemanniana $\tilde{g}$ indotta da (M, g), e l'orientazione indotta dall'essere bordo della varietà orientata Ω; sia $\nu_{\tilde{g}}$ la corrispondente forma di volume Riemanniano, e indichiamo con $j: \partial\Omega \to M$ l'inclusione.

(iii) Dimostra che esiste un unico campo di versori N lungo $\partial\Omega$ tale che $N(p) \perp T_p(\partial\Omega)$ per ogni $p \in \partial\Omega$, e tale che $j^*(\iota_N \nu_g) = \nu_{\tilde{g}}$.
(iv) Dimostra che $j^*(\iota_Z \nu_g) = \langle Z, N \rangle \nu_{\tilde{g}}$ per ogni $Z \in \mathcal{T}(M)$, dove N è il campo di versori introdotto nel punto precedente. [*Suggerimento:* osserva preliminarmente che se Z è tangente a $\partial\Omega$ allora $j^*(\iota_Z \nu_g) = O$.]
(v) Dimostra il *teorema della divergenza:* per ogni $Z \in \mathcal{T}(M)$ si ha

$$\int_\Omega \mathrm{div}(Z)\, \nu_g = \int_{\partial\Omega} \langle Z, N \rangle\, \nu_{\tilde{g}} .$$