Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Secondo scritto A.A. 2010/11 — 3 marzo 2011

Nome e Cognome:

---

1) Sia $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale su una varietà compatta. Dimostra che il flusso di X è definito su tutto $\mathbb{R} \times M$.

2) Dato $p \in \mathbb{N}$, sia
$$S_p = \{(0,0), (1,0), \ldots, (p,0)\} \subset \mathbb{R}^2 \ .$$
Calcola la coomologia di de Rham di $M = \mathbb{R}^2 \setminus S_p$.

3) Sia (M, g) una varietà Riemanniana, e $f \in C^\infty(M)$. Il *gradiente* di f è l'unico campo vettoriale $\mathrm{grad} f \in \mathcal{T}(M)$ tale che
$$\forall p \in M, v \in T_pM \qquad \langle \mathrm{grad} f(p), v \rangle_p = df_p(v) \ .$$
Dimostra che se $\|\mathrm{grad} f\| \equiv 1$ allora le curve integrali di $\mathrm{grad} f$ sono tutte geodetiche.