Istituzioni di Geometria

Primo scritto — 11 gennaio 2010

Nome e Cognome:

---

1) Dimostra che il sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ definito da

$$X = \{[x^0 : x^1 : x^2 : x^3] \mid x^0x^3 = x^1x^2\}$$

è una sottovarietà bidimensionale di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Dimostra inoltre che l'applicazione $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ definita da

$$f([x^0 : x^1], [y^0 : y^1]) = [x^0y^0 : x^0y^1 : x^1y^0 : x^1y^1]$$

è un diffeomorfismo fra $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e X.

2) Sia G un gruppo di Lie compatto, e indichiamo con $\theta\colon G \times M \to M$ un'azione di G su una varietà M (in altre parole, θ è differenziabile; ponendo $\theta_g = \theta(g, \cdot)$ per ogni $g \in G$, si ha $\theta_{g_1} \circ \theta_{g_2} = \theta_{g_1 g_2}$ per ogni g_1, $g_2 \in G$; e $\theta_e = \mathrm{id}_M$, dove $e \in G$ è l'elemento identico). Diremo che una k-forma $\omega \in A^k(M)$ è *invariante* se $\theta_g^*\omega = \omega$ per ogni $g \in G$. Indicheremo con $A_G^k(M)$ lo spazio delle k-forme invarianti.

Indichiamo poi con Ω la forma di volume bi-invariante (cioè tale che $L_g^*\Omega = R_g^*\Omega = \Omega$ per ogni $g \in G$, dove L_g è la traslazione sinistra e R_g la traslazione destra) di G tale che $\int_G \Omega = 1$ (puoi dare per buona l'esistenza di Ω, non è necessario dimostrarlo). Definiamo un'applicazione $\mathcal{I}\colon A^k(M) \to A^k(M)$ ponendo

$$\mathcal{I}\omega(X_1, \ldots, X_k) = \int_G \theta_g^*\omega(X_1, \ldots, X_k)\Omega$$

per ogni $\omega \in A^k(M)$ e $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{T}(M)$.

(i) Dimostra che la formula precedente definisce effettivamente una k-forma $\mathcal{I}\omega \in A^k(M)$.
(ii) Dimostra che $\mathcal{I}\omega$ è invariante per ogni $\omega \in A^k(M)$.
(iii) Dimostra che $\mathcal{I}\omega = \omega$ se $\omega \in A_G^k(M)$.
(iv) Dimostra che se ω è invariante anche $d\omega$ lo è, cioè che $d\bigl(A_G^k(M)\bigr) \subseteq A_G^{k+1}(M)$.
(v) Dimostra che $d \circ \mathcal{I} = \mathcal{I} \circ d$.
(vi) Definiamo la coomologia invariante $H_G^\bullet(M)$ di M come quoziente fra il nucleo e l'immagine del differenziale esterno d ristretto alle forme invarianti, cioè poniamo $H_G^k(M) = \mathrm{Ker} d|_{A_G^k(M)} / \mathrm{Im}\, d|_{A_G^{k-1}(M)}$. Definisci un omomorfismo naturale $i\colon H_G^\bullet(M) \to H^\bullet(M)$ e dimostra che è iniettivo. [*Commento:* si può dimostrare che è un isomorfismo, ma la surgettività richiede altre tecniche.]

3) Sia (M, g) una varietà Riemanniana. Una *simmetria* in $p \in M$ è una isometria $\sigma\colon M \to M$ che ha p come punto fisso isolato e tale che $\sigma^2 = \mathrm{id}_M$.

(i) Dimostra che se $\sigma\colon M \to M$ è una simmetria in $p \in M$ allora $d\sigma_p(v) = -v$ per ogni $v \in T_pM$ e $\sigma\bigl(\exp_p(v)\bigr) = \exp_p(-v)$ per ogni $v \in \mathcal{E}_p$, dove $\mathcal{E}_p = \mathcal{E} \cap T_pM$ è il dominio di $\exp_p$.
(ii) Supponi che per ogni $p \in M$ esista una simmetria in p. Dimostra allora che $\mathcal{E} = TM$, cioè che tutte le geodetiche di M sono definite su tutto l'asse reale.