Geometria e Topologia Differenziale

Quinto scritto — 16 settembre 2008

Nome e Cognome: Anno d'immatricolazione:

---

1) Sia $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

(i) Calcola la lunghezza di $\sigma|_{[0,2\pi]}$.
(ii) Mostra che $\sigma|_{(0,2\pi)}$ è biregolare, e calcolane la curvatura.
Assegnata una curva piana biregolare $\gamma\colon I \to \mathbb{R}$, la curva piana $\beta\colon I \to \mathbb{R}$ definita da

$$\beta(t) = \gamma(t) + \frac{\mathbf{n}(t)}{\kappa(t)}$$

prende il nome di *evoluta* di γ.
(iii) Sia $\varphi\colon (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ l'evoluta di $\sigma|_{(0,2\pi)}$. Mostra che esiste $v \in \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(t) = \sigma(t + \pi) + v$ per ogni $t \in (0, 2\pi)$.

2) Sia $\varphi\colon \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$\varphi(u, v) = (uv^2, uv, v - uv),$$

e sia $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$. Sia inoltre $\gamma\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = (s^2, s, 0)$.
(i) Mostra che S è una superficie regolare, di cui φ fornisce una parametrizzazione globale.
(ii) Determina i coefficienti metrici ed i coefficienti di forma di S (rispetto alla parametrizzazione φ).
(iii) Mostra che la curvatura Gaussiana di S è ovunque non positiva.
(iv) Mostra che γ è una curva regolare il cui sostegno è contenuto in S, e calcola curvatura normale e curvatura geodetica di γ (considerata come curva su S) in ogni suo punto.

3) Siano S_1, S_2 due superfici compatte orientabili, e sia $\mathbf{T_1}$ (rispettivamente $\mathbf{T_2}$) una triangolazione di S_1 (rispettivamente di S_2). Definiamo la *somma connessa* di S_1 e S_2, che sarà indicata con $S_1\#S_2$, come segue.

Se T_1, T_2 sono facce di $\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}$ rispettivamente, sia S_i' la superficie con bordo ottenuta rimuovendo da S_i la parte interna di T_i. Identifica ora il bordo di S_1 con il bordo di S_2 tramite un omeomorfismo che mandi ogni lato di T_1 su un lato di T_2. Definisci allora $S_1\#S_2$ come lo spazio topologico ottenuto dall'unione disgiunta di S_1' e S_2' tramite l'identificazione appena descritta. Non è difficile dimostrare che $S_1\#S_2$ è una superficie, il cui tipo di omeomorfismo non dipende dalle scelte fatte (nemmeno dalle triangolazioni $\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}$!).
(i) Calcola $\chi(S_1\#S_2)$ in funzione di $\chi(S_1)$ e $\chi(S_2)$.
(ii) Sfruttando il Teorema di classificazione delle superfici compatte orientabili, mostra che, se S_1, S_2 sono superfici compatte orientabili tali che $S_1\#S_2 \cong S^1 \times S^1$, allora $S_1 \cong S^1 \times S^1$ e $S_2 \cong S^2$, o viceversa (dove indichiamo con $\cong$ la relazione di omeomorfismo).