Geometria e Topologia Differenziale

Quinto scritto — 14 settembre 2006

Nome e Cognome:

---

1) Sia $\sigma_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\sigma(t) = \big((1-at)\cos t, (1-at)\sin t, 1-at^2\big),$$

dove a è un parametro reale.

(i) Mostra che σ_a è una curva regolare per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Determina per quali $a \in \mathbb{R}$ la curva σ_a è biregolare, e per tali valori calcolane curvatura e torsione.

2) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^2 - z = 1\}.$$

(i) Trova l'unico punto $p_0 \in S$ tale che $T_{p_0}S$ sia il piano xy.

(ii) Fissa una mappa di Gauss $N\colon S \to S^2$ e calcola $dN_{p_0}(\mathbf{e}_1)$ e $dN_{p_0}(\mathbf{e}_2)$, dove $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ è la base canonica del piano xy.

(iii) Scrivi la matrice che rappresenta dN_{p_0} rispetto alla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, e calcola le curvature principali, Gaussiana e media di S in p_0.

3) Sia $\sigma\colon I \to S$ una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una superficie orientata $S \subset \mathbb{R}^3$ con mappa di Gauss $N\colon S \to S^2$. Sia $\mathbf{t}\colon I \to \mathbb{R}^3$ il versore tangente di σ; definiamo poi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\colon I \to \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{u}(s) = N\big(\sigma(s)\big) \wedge \mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{v}(s) = N\big(\sigma(s)\big)$. Infine, definiamo $\tau_g\colon I \to \mathbb{R}$ con

$$\tau_g(s) = -\big\langle dN_p\big(\mathbf{t}(s)\big), \mathbf{u}(s)\big\rangle.$$

Dimostra che si ha

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}} = \kappa_g \mathbf{u} + \kappa_n \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{u}} = -\kappa_g \mathbf{t} + \tau_g \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -\kappa_n \mathbf{t} - \tau_g \mathbf{u}, \end{cases}$$

dove κ_n, $\kappa_g\colon I \to \mathbb{R}$ sono la curvatura normale e la curvatura geodetica di σ.