Geometria e Topologia Differenziale

Quarto scritto — 25 giugno 2007

Nome e Cognome: Anno d'immatricolazione:

---

1) Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ sia $\sigma_\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva data da

$$\sigma_\lambda(t) = (\lambda t + 2\cos t, \lambda t^2 + \sin t, \lambda t^3).$$

(i) Calcola la curvatura di σ_λ nel punto $t = \pi$ al variare del parametro λ.
(ii) Per quali valori di λ la curva σ_λ è una curva piana?
(iii) Calcola l'indice di avvolgimento di $\sigma_0|_{[0,2\pi]}$ rispetto ai punti $(3,0,0)$ e $(0,0,0)$.

2) Sia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞, e sia $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da

$$h(s,t) = (s\cos f(t), s\sin f(t), t).$$

(i) Mostra che h definisce un diffeomorfismo tra $\mathbb{R}^2$ ed una superficie regolare chiusa $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.
(ii) Determina i coefficienti metrici ed i coefficienti di forma di Σ rispetto alla parametrizzazione h.
(iii) Per ogni $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, calcola curvatura media e curvatura di Gauss di Σ in $h(s,t)$.
(iv) Mostra che per ogni $z \in \mathbb{R}$ esiste un'isometria di Σ in sé che porta $(0,0,0)$ in $(0,0,z)$ se e solo se Σ è un elicoide o un piano, ovvero se e solo se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $f(t) = at + b$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

3) Sia S il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + 2xz = 1\},$$

e siano $A = S \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$, $B = S \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z, y > 0\}$.

(i) Mostra che S è una superficie regolare chiusa, e calcolane un campo di versori normali.
(ii) Mostra che A è il sostegno di una curva regolare periodica γ, dai una parametrizzazione per lunghezza d'arco di γ e mostra che tale parametrizzazione definisce una geodetica di S.
(iii) Mostra che B è il sostegno di una curva regolare σ, e dai una parametrizzazione regolare (non necessariamente per lunghezza d'arco) di σ.
(iv) Mostra che B è il sostegno di una geodetica di S.