

Geometria e Topologia Differenziale

Quarto scritto — 20 luglio 2006

Nome e Cognome:

Anno d'immatricolazione:

1) Sia $\sigma_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\sigma_a(t) = (2t - at^3, 3t^2, at^2),$$

dove a è un parametro reale.

- (i) Mostra che σ_a è una curva regolare per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- (ii) Determina per quali $a \in \mathbb{R}$ la curva σ_a è biregolare, e per tali valori calcolane curvatura e torsione.

2) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare compatta. Mostra che S non può avere curvatura media nulla in ogni punto.

3) Sia T il toro ottenuto ruotando attorno all'asse z la circonferenza di equazione $(y - 2)^2 + z^2 = 1$ contenuta nel piano $x = 0$. Sia $\xi \in \mathcal{T}(T)$ il campo vettoriale dato da

$$\xi(p) = \pi_p \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

per ogni $p = (x, y, z) \in S$, dove $\pi_p: \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p S$ è la proiezione ortogonale.

- (i) Trova i punti singolari di ξ .
- (ii) Calcola la somma degli indici di ξ nei suoi punti singolari.
- (iii) Calcola l'indice di ξ in ogni punto singolare.