Geometria e Topologia Differenziale

Secondo scritto — 19 febbraio 2008

Nome e Cognome: Anno d'immatricolazione:

---

1) Sia S la superficie regolare ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z la semiretta di equazione parametrica $v \mapsto (v, 0, 2v)$, $v > 0$, e sia $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\sigma(t) = (e^t \cos 2t, e^t \sin 2t, 2e^t)$.

(i) Mostra che σ è regolare, e calcolane una riparametrizzazione per lunghezza d'arco definita su $(0, +\infty)$.
(ii) Calcola curvatura e torsione di σ.
(iii) Mostra che il sostegno di σ è contenuto in S, e calcola il modulo della curvatura normale e della curvatura geodetica di σ, considerata come curva su S.

2) Sia $\sigma\colon I \to S$ una curva regolare di classe C^∞ parametrizzata per lunghezza d'arco in una superficie orientata con mappa di Gauss $N\colon S \to S^2$. Per ogni $s \in I$, siano

$$\mathbf{u}(s) = N(\sigma(s)) \wedge \mathbf{t}(s), \quad \mathbf{v}(s) = N(\sigma(s)).$$

La terna ortonormale $\{\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ è detta *riferimento di Darboux* di σ. Per ogni $s \in I$, poni

$$\tau_g(s) = \langle dN_{\sigma(s)}(\mathbf{t}(s)) \wedge \mathbf{t}(s), N(\sigma(s))\rangle.$$

(i) Mostra che valgono le seguenti relazioni:

$$\dot{\mathbf{t}} = \kappa_g \mathbf{u} + \kappa_n \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{u}} = -\kappa_g \mathbf{t} + \tau_g \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = -\kappa_n \mathbf{t} - \tau_g \mathbf{u}.$$

Supponi ora che σ sia biregolare. Osserva che $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono complanari, orienta il piano su cui essi giacciono in modo che $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ne sia una base positiva, e sia $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ una determinazione continua dell'angolo tra $\mathbf{n}$ e $\mathbf{v}$ in modo da avere $\mathbf{v} = (\cos\phi)\mathbf{n} + (\sin\phi)\mathbf{b}$.

(ii) Mostra che $\mathbf{u} = (\sin\phi)\mathbf{n} - (\cos\phi)\mathbf{b}$ e che

$$\tau_g = \tau + \frac{d\phi}{ds}.$$

Supponi ora $S = S^2$ con mappa di Gauss $N(p) = p$ per ogni $p \in S^2$, e supponi che $\sigma\colon \mathbb{R} \to S$ sia periodica di periodo T.

(iv) Mostra che per ogni $s \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ si ha $\phi(s) \neq 2k\pi$, e deducine che $|\phi(s) - \phi(s')| < 2\pi$ per ogni $s, s' \in \mathbb{R}$.
(v) Mostra che $\int_0^T \tau(s) ds = 0$.

3) Supponi che una superficie regolare S ed un piano P siano tangenti lungo il sostegno di una curva regolare γ. Mostra che tutti i punti del sostegno di γ sono parabolici o planari.