Geometria e Topologia Differenziale

Secondo scritto dell'A.A. 2004-05 — 12 luglio 2005

Nome e Cognome: Anno d'immatricolazione:

---

1) Data una curva $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, sia $\varphi\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione data da

$$\varphi(s,u) = \sigma(s) + u\,\mathbf{b}(s),$$

dove $\mathbf{b}$ è il versore binormale della curva σ.

(i) Dimostra che φ è una superficie immersa.
(ii) Dimostra che esiste sempre un aperto $U \subseteq I \times \mathbb{R}$ tale che $S = \varphi(U)$ sia una superficie regolare.
(iii) Calcola la curvatura Gaussiana di S.
(iv) Supponendo che U contenga $I \times \{0\}$, dimostra che σ è una geodetica di S.

2) Sia E l'ellissoide di equazione

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{25}y^2 + z^2 = 3.$$

(i) Calcola la curvatura gaussiana K e le direzioni principali di E nel punto $p = (2,5,1) \in E$.
(ii) Calcola l'integrale della curvatura gaussiana K sull'intersezione di E con il quadrante

$$Q = \{(x,y,z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$
