Geometria e Topologia Differenziale

Primo scritto A.A. 06/07 — 16 gennaio 2007

Nome e Cognome:

---

1) Sia I un intervallo aperto di $\mathbb{R}$, e sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\gamma(s) = \mathbf{t}(s)$.

(i) Trova un'espressione per il parametro lunghezza d'arco di γ in funzione del parametro lunghezza d'arco di σ.

(ii) Esprimi il riferimento di Frenet di γ in funzione del riferimento di Frenet di σ.

(iii) Supponi ora che il supporto di γ sia contenuto in una circonferenza. Mostra che esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $\tau(s) = c \cdot \kappa(s)$ per ogni $s \in I$, dove τ e κ sono rispettivamente la torsione e la curvatura di σ.

2) Siano S_1, S_2 due superfici regolari di $\mathbb{R}^3$, e supponi che S_1 intersechi S_2 lungo il sostegno di una curva regolare γ. Supponi inoltre che l'angolo formato da S_1 e S_2 lungo γ sia costante.

(i) Mostra che, se γ è una linea di curvatura per S_1, allora è una linea di curvatura anche per S_2.

Sia ora $\varphi\colon (0, \pi/2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi(u, v) = \left(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u + \log \tan \frac{u}{2} + v\right),$$

sia S l'immagine di φ e sia $\gamma\colon (0, \pi/2) \to S$ la curva data da $\gamma(t) = \varphi(t, 0)$.

(ii) Mostra che φ è una superficie parametrizzata, e calcolane un campo di versori normali.

(iii) Mostra che il sostegno di γ è contenuto in un piano che contiene l'asse z e che forma con S un angolo di $\pi/4$.

(iv) Mostra che γ è una linea di curvatura per S.

3) Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme definito da $C = \{(x, y, z) \mid 3(x^2 + y^2) - z^2 = 0,\ z > 0\}$, e considera la funzione $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to C$ data da

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\sqrt{3(x^2 + y^2)}}{2}\right).$$

(i) Mostra che C è una superficie regolare.

(ii) Mostra che φ è un'isometria locale.

(iii) Sia $\sigma\colon \mathbb{R} \to C$ una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco tale che i vettori $\sigma(0)$ e $\dot\sigma(0)$ siano linearmente indipendenti. Mostra che la funzione $t \mapsto z(\sigma(t))$ ammette un unico minimo m, e determina m in funzione di $\sigma(0)$ e dell'angolo formato da $\sigma(0)$ e $\dot\sigma(0)$.