

ANNO ACCADEMICO 2013–14  
SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI  
**MATEMATICA**  
SECONDO COMPITINO — TESTO A  
PROFF. MARCO ABATE E ROSETTA ZAN

15 aprile 2014

Nome e cognome \_\_\_\_\_

Matricola \_\_\_\_\_

**ISTRUZIONI:** Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compitino sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

*Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!*

PRIMA PARTE

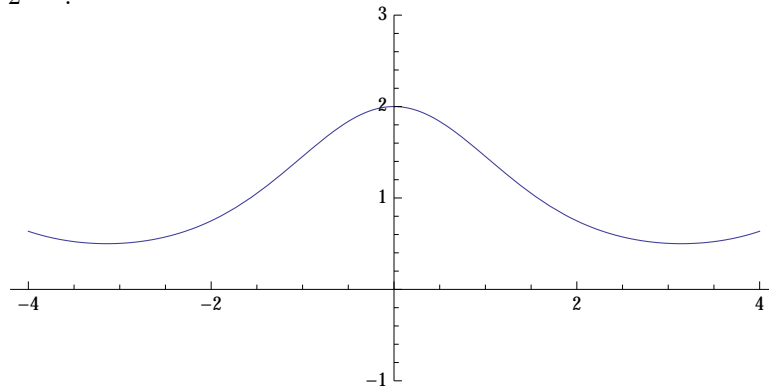
**Esercizio 1.** Hai misurato la percentuale di calcio contenuta in cinque campioni di roccia metamorfica, ottenendo cinque valori  $x_1, \dots, x_5$  tutti compresi fra 0 e 1. La media di questi valori può essere 3? E la varianza può essere 5? Se pensi che la risposta sia sì fai un esempio, se pensi sia no spiega perché.

**Esercizio 2.** Calcola la derivata della funzione  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  data da

$$F(z) = \log \left( \frac{1 + z^2}{1 + z^4} \right) .$$

**Esercizio 3.** Stabilisci (giustificando la risposta) quale delle funzioni seguenti può avere un grafico come quello in figura:

- (a)  $4 - 2^{\cos x}$ ;
- (b)  $2^{\cos x}$ ;
- (c)  $x^4 - 2x^2 + 1$ ;
- (d)  $2^{\sin x}$ .



## SECONDA PARTE

**Esercizio 4.** Una zona protetta della foresta casentinese con un'estensione pari a  $1000 \text{ m}^2$  è stata tenuta sotto osservazione per trent'anni. La tabella sottostante mostra com'è variato negli anni il numero di alberi presenti nella zona protetta.

- (i) Supponendo che il numero di alberi dipenda linearmente dal tempo, calcola la retta di regressione che meglio approssima i dati.
- (ii) L'approssimazione data dalla retta di regressione è buona?
- (iii) Per quale intervallo di tempo ritieni che la retta di regressione possa rappresentare realisticamente il numero di alberi presenti nella zona protetta?

Dati	$x$ (anno)	$y$ (numero di alberi)	$x^2$	$xy$	$y^2$
	1980	500	3 920 400	990 000	250 000
	1990	652	3 960 100	1 297 480	425 104
	2000	666	4 000 000	1 332 000	443 556
	2010	710	4 040 100	1 427 100	504 100
<i>Medie</i>	<i>1995</i>	<i>632</i>	<i>3 980 150</i>	<i>1 261 645</i>	<i>405 690</i>

[*Suggerimento:* potrebbe servirti qualcuno dei seguenti conti:  $805/125 = 6.44$ ;  $1995 \cdot 632 = 1\,260\,840$ ;  $\sqrt{3\,980\,150} \simeq 1995.0313$ ;  $1995^2 = 3\,980\,025$ ;  $632^2 = 399\,424$ ;  $6.44 \cdot 1995 = 12\,847.8$ ;  $\sqrt{6266} \simeq 79.1581$ ;  $125/805 \simeq 0.1553$ ;  $\sqrt{405\,960} \simeq 636.9380$ ;  $805/885.0141 \simeq 0.9096$ ;  $805/79.1581 \simeq 10.1695$ ;  $632 \cdot 3\,980\,150 = 2\,515\,454\,800$ ;  $\sqrt{1\,261\,645} \simeq 1123.2297$ ;  $125/885.0141 \simeq 0.1412$ ;  $11.1803 \cdot 79.1581 \simeq 885.0141$ ;  $0.1553 \cdot 1995 \simeq 309.7826$ ;  $12\,215.8/6.44 \simeq 1896.8634$ ;  $13\,215.8/6.44 \simeq 2052.1429$ ;  $\sqrt{125} \simeq 11.1803$ .]

**Esercizio 5.** Una raffineria si trova in un punto  $A$  lungo un'autostrada rettilinea, mentre un serbatoio di petrolio si trova in un punto  $B$  raggiungibile partendo da  $A$  viaggiando per  $a$  km lungo l'autostrada fino al punto  $C$ , e poi per  $b$  km lungo un viottolo perpendicolare all'autostrada. Si deve costruire un oleodotto da  $A$  a  $B$  sapendo che i costi di costruzione fuori dall'autostrada sono  $k \geq 1$  volte maggiori dei costi di costruzione lungo l'autostrada. L'oleodotto può essere realizzato collegando direttamente  $A$  con  $B$  attraverso i campi oppure seguendo l'autostrada nella direzione di  $C$  fino a un punto  $P$  e poi attraversando i campi in linea retta fino a  $B$ .

- (i) Determina il percorso meno costoso dell'oleodotto se  $a = 5$ ,  $b = 12$  e  $k = 3$ .
- (ii) Determina il percorso meno costoso dell'oleodotto se  $a = 5$ ,  $b = 10$  e  $k = 2$ .
- (iii) Verifica che il percorso meno costoso è il collegamento diretto da  $A$  a  $B$  se e solo se  $1 \leq k \leq \sqrt{1 + (b/a)^2}$ .

**Esercizio 6.** Studi geologici suggeriscono che il raggio della calotta polare antartica misurato in chilometri dipende dal tempo (misurato in secoli partendo dall'anno zero) secondo la legge

$$R(t) = 80\,000 \frac{t + 40}{t^2 + 1600} .$$

- (i) Studia questa funzione, anche per  $t < 0$ . [*Suggerimento:* 40 è una radice del polinomio  $p(t) = 2t^3 + 240t^2 - 9600t - 128\,000$ .]
- (ii) Descrivi cosa questo modello suggerisce sull'andamento temporale, passato e futuro, della calotta polare antartica e sul verificarsi di eventuali ere glaciali.