Geometria e Topologia Differenziale

Secondo compitino — A.A. 2003/04 — 23 aprile 2003

Nome e Cognome:

Da svolgere in classe:

1) Sia $\psi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ l'applicazione data da

$$\psi(u,v)=(v\cos u, v\sin u, u).$$

(i) Dimostra che $S=\psi(\mathbb{R}^2)$ è una superficie regolare.
(ii) Trova il piano tangente a S nel punto $p=(0,0,0)$.
(iii) S è orientabile?

2) Siano S_1, $S_2\subset\mathbb{R}^3$ le superfici definite da

$$S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2-z^2=1\},\qquad S_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2=1\}.$$

Sia inoltre $F\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definita da

$$F(x,y,z)=\left(\frac{x}{\sqrt{1+z^2}},\frac{y}{\sqrt{1+z^2}},z\right).$$

(i) Dimostra che $F(S_1)=S_2$.
(ii) Dimostra che $F|_{S_1}$ è un diffeomorfismo fra S_1 ed S_2.
(iii) Dato $p=(1,0,0)\in S_1\cap S_2$, scegli una parametrizzazione locale φ di S_1 centrata in p, e una parametrizzazione locale $\hat\varphi$ di S_2 centrata in p. Posto $\partial_j=\partial\varphi/\partial x^j$ e $\hat\partial_j=\partial\hat\varphi/\partial x^j$ per $j=1$, 2, scrivi la matrice che rappresenta l'applicazione lineare $dF_p\colon T_pS_1\to T_pS_2$ rispetto alle basi $\{\partial_1,\partial_2\}$ di T_pS_1 e $\{\hat\partial_1,\hat\partial_2\}$ di T_pS_2.