Elementi di Geometria Differenziale

Secondo compitino — 20 maggio 2005

Nome e Cognome:

---

1) Siano (M, g) e $(\tilde{M}, \tilde{g})$ due varietà Riemanniane, con distanze Riemanniane d e $\tilde{d}$ rispettivamente, e sia $H: M \to \tilde{M}$ un omeomorfismo che sia un'isometria per le distanze, cioè tale che

$$\tilde{d}\big(H(p), H(q)\big) = d(p, q)$$

per ogni p, $q \in M$. Scopo di questo esercizio è dimostrare che H è necessariamente un'isometria di varietà Riemanniane, cioè un diffeomorfismo tale che $H^*\tilde{g} = g$.

(i) Dimostra che H manda geodetiche in geodetiche.

(ii) Dimostra che per ogni $p \in M$ esistono $\varepsilon > 0$ e un'applicazione $\psi: B_\varepsilon(O_p) \to T_{H(p)}\tilde{M}$ tali che

$$\exp_{H(p)} \psi(v) = H\big(\exp_p(v)\big)$$

per ogni $v \in B_\varepsilon(O_p)$.

(iii) Dimostra che se $\varepsilon > 0$ è abbastanza piccolo e v, $w \in B_\varepsilon(O_p)$ allora esiste $C > 0$ tale che

$$(1 - Ct)\|tv - tw\|_p \leq d\big(\exp_p(tv), \exp_p(tw)\big) \leq (1 + Ct)\|tv - tw\|_p$$

per ogni $t \in [-1, 1]$.

(iv) Deduci che se $\varepsilon > 0$ è abbastanza piccolo e v, $w \in B_\varepsilon(O_p)$ allora

$$\lim_{t\to 0} \frac{d\big(\exp_p(tv), \exp_p(tw)\big)}{t} = \|v - w\|_p.$$

(v) Dimostra che se $\varepsilon > 0$ è abbastanza piccolo allora

$$\langle \psi(v), \psi(w) \rangle_{H(p)} = \langle v, w \rangle_p$$

per ogni v, $w \in B_\varepsilon(O_p)$.

(vi) Dimostra che ψ è la restrizione di un'applicazione lineare.

(vii) Concludi che H è di classe C^∞, che $\psi = dH_p$, e che H è un'isometria di varietà Riemanniane.

2) Sia M una sottovarietà di una varietà Riemanniana $\tilde{M}$, considerata con la metrica indotta. In questo esercizio indicheremo con la tilde tutti gli oggetti (connessione di Levi-Civita $\tilde{\nabla}$, curvatura $\tilde{R}$, eccetera) relativi a $\tilde{M}$, e senza tilde i corrispondenti oggetti relativi a M. Indicheremo poi con $T: T\tilde{M} \to TM$ e $\perp: T\tilde{M} \to (TM)^\perp$ le proiezioni ortogonali. Infine, $\mathcal{N}(M)$ sarà lo spazio delle sezioni di $T\tilde{M}|_M$ ovunque ortogonali a TM: $N \in \mathcal{N}(M)$ sse $N(p) \in (T_pM)^\perp$ per ogni $p \in M$.

(i) Dimostra che l'applicazione $I\!I: \mathcal{N}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to C^\infty(M)$, detta *seconda forma fondamentale* di M in $\tilde{M}$, data da

$$I\!I(N, X, Y) = \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle$$

è $C^\infty(M)$-trilineare, ed è inoltre simmetrica negli ultimi due argomenti.

(ii) Sia $S: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{N}(M)$ l'*operatore di forma* definito da $S(X, Y) = -\perp(\tilde{\nabla}_X Y)$ per ogni X, $Y \in \mathcal{T}(M)$. Dimostra che $\langle S(X, Y), N \rangle = I\!I(N, X, Y)$ per ogni $N \in \mathcal{N}(M)$ e X, $Y \in \mathcal{T}(M)$.

(iii) Dimostra l'*equazione di Gauss*

$$\langle \tilde{R}_{XY} Z, W \rangle = \langle R_{XY} Z, W \rangle + \langle S(Y, Z), S(X, W) \rangle - \langle S(X, Z), S(Y, W) \rangle$$

per ogni X, Y, Z, $W \in \mathcal{T}(M)$.

(iv) Dimostra l'*equazione di Codazzi-Mainardi*

$$\perp \tilde{R}_{XY}Z = S\big(Y, S(X,Z)\big) + S(\nabla_Y X, Z) + S(X, \nabla_Y Z) - S\big(X, S(Y,Z)\big) - S(\nabla_X Y, Z) - S(Y, \nabla_X Z)$$

per ogni X, Y, $Z \in T(M)$.

(v) Dimostra il *lemma di Synge:* sia $\sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ una geodetica per $\tilde{M}$ il cui sostegno sia contenuto in M, e $\pi \subset T_{\sigma(0)}M$ un 2-piano contenente $\dot{\sigma}(0)$. Allora $K(\pi) \le \tilde{K}(\pi)$.

3) Dimostra la seguente generalizzazione del Teorema di Bonnet-Myers: sia M una varietà Riemanniana completa. Supponiamo che esistano $a > 0$ e $c \ge 0$ tali che per ogni coppia di punti di M e ogni geodetica minimizzante σ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco che unisce questi due punti si abbia

$$\mathrm{Ric}\big(\dot{\sigma}(s)\big) \ge a + \frac{df}{ds}$$

lungo σ, per una qualche funzione f tale che $|f(s)| \le c$ lungo σ. Dimostra che M è compatto, e trova una stima sul diametro.