Elementi di Geometria Differenziale

Primo compitino — 23 marzo 2005

Nome e Cognome:

Da svolgere a casa:

1) Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica zero. Dimostra che l'algebra esterna $\bigwedge(V \oplus W)$ è canonicamente isomorfa al prodotto tensoriale $(\bigwedge V) \otimes (\bigwedge W)$.

2) Indichiamo con $S(n,\mathbb{R}) \subset M_{n,n}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici simmetriche a coefficienti reali; chiaramente, possiamo identificare $S(n,\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. Sia $F\colon M_{n,n}(\mathbb{R}) \to S(n,\mathbb{R})$ l'applicazione data da $F(X) = X^T X$. Dimostra che

$$dF_X(A) = X^T A + A^T X$$

per ogni A, $X \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Sia $O(n) = \{X \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid X^T X = I_n\}$ il *gruppo ortogonale;* dimostra che per ogni $X \in O(n)$ il differenziale $dF_X\colon M_{n,n}(\mathbb{R}) \to S(n,\mathbb{R})$ è surgettivo, e deduci che $O(n)$ è una sottovarietà di dimensione $n(n-1)/2$ di $M_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$. Infine, determina lo spazio tangente $T_{I_n}O(n)$ a $O(n)$ in I_n, visto come sottospazio di $T_{I_n}M_{n,n}(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$.

3) Sia $\iota\colon M \to N$ una sottovarietà. Dimostra che per ogni $f \in C^\infty(M)$ e ogni intorno aperto U di M in N esiste una $\tilde{f} \in C^\infty(U)$ tale che $\tilde{f}|_M \equiv f$.

4) Sia $\tilde{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione data da

$$\tilde{F}(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz),$$

e indichiamo con F la restrizione di $\tilde{F}$ a $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

(i) Dimostra che F induce una mappa $\varphi\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ di classe C^∞.

(ii) Dimostra che φ è un embedding del piano proiettivo in $\mathbb{R}^4$.