Elementi di Geometria Differenziale

Primo compitino — 2 aprile 2004

Nome e Cognome:

Da svolgere a casa:

1) Dimostra che il differenziale $d(\det)_X\colon M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ del determinante $\det\colon GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è dato da

$$d(\det)_X(B) = (\det X)\,\mathrm{tr}(X^{-1}B)$$

per ogni $X \in GL(n,\mathbb{R})$ e $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, dove $\mathrm{tr}(A)$ è la traccia della matrice A.

2) Sia M una varietà, e $\sigma \in \mathcal{T}^k_h(M)$ un tensore di tipo $\binom{h}{k}$. Sia $\sigma^\#\colon \big(\mathcal{T}(M)\big)^h \times \big(\mathcal{T}_1(M)\big)^k \to C^\infty(M)$ definita ponendo

$$\sigma^\#(X_1,\ldots,X_h,\omega^1,\ldots,\omega^k)(p) = \sigma_p\big(X_1(p),\ldots,X_h(p),\omega^1(p),\ldots,\omega^k(p)\big).$$

Dimostra che $\sigma^\#$ è $C^\infty(M)$-multilineare, e viceversa che ogni mappa $\tau\colon \big(\mathcal{T}(M)\big)^h \times \big(\mathcal{T}_1(M)\big)^k \to C^\infty(M)$ che sia $C^\infty(M)$-multilineare è della forma $\tau = \sigma^\#$ per qualche sezione $\sigma \in \mathcal{T}^k_h(M)$.

3) Sia $P\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{O\}$ un'applicazione C^∞ *omogenea* di *grado* $d \in \mathbb{Z}$, cioè tale che $P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^*$ e $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$. Dimostra che l'applicazione $\tilde{P}\colon \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^k(\mathbb{R})$ data da $\tilde{P}([x]) = [P(x)]$, dove $[\cdot]\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è la proiezione canonica, è ben definita e di classe C^∞.

4) Sia $F\colon M \to N$ un'applicazione di classe C^∞ fra varietà, e $S \subset N$ una sottovarietà embedded. Diremo che F è *trasversa* a S se per ogni $p \in F^{-1}(S)$ si ha $T_{F(p)}N = dF_p(T_pM) + T_{F(p)}S$, dove la somma non è necessariamente diretta. Se F è trasversa a S, dimostra che $F^{-1}(S)$ è una sottovarietà embedded di M di codimensione in M uguale alla codimensione di S in N.

5) (i) Sia M una varietà e $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale. Un punto $p \in M$ è *singolare* per X se $X(p) = O$; *regolare* altrimenti. Dimostra che se p è un punto singolare di X allora esiste una carta (U,φ) centrata in p tale che $X|_U = \partial/\partial x^1$. [*Suggerimento:* Essendo un problema locale, possiamo supporre che M sia un aperto di $\mathbb{R}^n$, e $p = O$. Sia Θ il flusso locale di X; allora si può prendere come φ l'inversa di $\psi(x^1,\ldots,x^n) = \theta_{x^1}(0,x^2,\ldots,x^n)$ ristretta a un opportuno intorno dell'origine.]

(ii) Siano $X_1,\ldots,X_k \in \mathcal{T}(M)$ campi vettoriali su una varietà M tali che $X_1(p),\ldots,X_k(p)$ siano linearmente indipendenti in T_pM per ogni $p \in M$. Dimostra che $[X_i,X_j] \equiv O$ per ogni $i,\,j = 1,\ldots,k$ se e solo se per ogni $p \in M$ esiste una carta locale (U,φ) centrata in p tale che $X_i|_U = \partial/\partial x^i$ per $i = 1,\ldots,k$. Tra parentesi, diremo che due campi vettoriali $X,\,Y \in \mathcal{T}(M)$ *commutano* se $[X,Y] = O$.

Definizioni: Una *distribuzione* k-dimensionale in una varietà M è una $\mathcal{D} \subseteq TM$ tale che $\mathcal{D}_p = \mathcal{D} \cap T_pM$ è un sottospazio vettoriale di T_pM di dimensione k per ogni $p \in M$. Una distribuzione k-dimensionale è *liscia* se per ogni $p \in M$ esistono un intorno aperto U di p e campi vettoriali $X_1,\ldots,X_k \in \mathcal{T}(U)$ tali che $X_1(q),\ldots,X_k(q)$ generano $\mathcal{D}_q$ per ogni $q \in U$. Una *sezione locale* di una distribuzione liscia $\mathcal{D}$ su un aperto $U \subseteq M$ è un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(U)$ tale che $X_p \in \mathcal{D}_p$ per ogni $p \in U$. Indicheremo con $\mathcal{T}_\mathcal{D}(U)$ lo spazio delle sezioni locali sopra U della distribuzione liscia $\mathcal{D}$. Una distribuzione liscia $\mathcal{D}$ è *involutiva* se $[X,Y] \in \mathcal{T}_\mathcal{D}(U)$ per ogni $X,\,Y \in \mathcal{T}_\mathcal{D}(U)$ e ogni aperto $U \subseteq M$. Una *sottovarietà integrale* di una distribuzione liscia $\mathcal{D}$ è una immersione $F\colon N \to M$ tale che $dF_p(T_pN) = \mathcal{D}_{F(p)}$ per ogni $p \in N$. Diremo che una distribuzione liscia $\mathcal{D}$ è *integrabile* se ogni punto di M è contenuto nell'immagine di una sottovarietà integrale di $\mathcal{D}$. Una carta locale (U,φ) è *piatta* rispetto a una distribuzione liscia $\mathcal{D}$ di dimensione k se $\partial_1|_p,\ldots,\partial_k|_p$ generano $\mathcal{D}_p$ per ogni $p \in U$. Infine, diremo che una distribuzione liscia $\mathcal{D}$ è *completamente integrabile* se ogni punto di M è contenuto nel dominio di una carta piatta rispetto a $\mathcal{D}$.

(iii) Dimostra che una distribuzione liscia completamente integrabile è integrabile, e che una distribuzione integrabile è involutiva.

(iv) Dimostra il *Teorema di Frobenius:* ogni distribuzione liscia involutiva è completamente integrabile. [*Suggerimento:* Dimostra che $\mathcal{D}$ è localmente generata da sezioni locali che commutano, e applica (ii).]