MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B
PROF. MARCO ABATE

SOLUZIONI SECONDO SCRITTO

6 giugno 2007

1. Parte I

Esercizio 1.1. *Il negozio di scarpe sotto casa tua questa settimana ha diminuito tutti i prezzi del 15%. Invece, il negozio di scarpe nella strada parallela ha effettuato uno sconto su tutto la merce del 10% il martedì e di un ulteriore 5% il giovedìṠapendo che i prezzi iniziali erano uguali, in quale negozio ti conviene andare a comprare le scarpe il venerdì?*

Indicando con P il prezzo iniziale delle scarpe, con P_1 il prezzo scontato nel negozio sotto casa, e con P_M, P_G i prezzi nel secondo negozio dopo gli sconti di martedì e di giovedì si ha:

$$P_1 = \left(1 - \frac{15}{100}\right) \cdot P = 0.85P$$

(ovvero il primo negozio effettua uno sconto del 15%) e

$$P_M = \left(1 - \frac{10}{100}\right) \cdot P = 0.9P$$

$$P_G = \left(1 - \frac{5}{100}\right) \cdot P_M = 0.95 \cdot 0.9P = 0.855P,$$

ovvero il secondo negozio effettua uno sconto del 14.5%. Mi conviene acquistare nel negozio sotto casa.

Esercizio 1.2. *Per quale sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ la funzione $f\colon \mathbb{R} \to I$ data da $f(x) = x^2 + 1$ ha codominio I ed è surgettiva?*

Una funzione $g\colon D \to C$ è surgettiva sul suo codominio se e soltanto se per ogni punto del codominio $y \in C$ esiste (almeno) un punto del dominio $x \in D$ tale che $g(x) = y$. Una funzione può sempre essere resa surgettiva, prendendo come codominio l'immagine.

Osservando che $x^2 + 1 \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e che se $c \in [1, +\infty)$ allora i punti $x_\pm = \pm\sqrt{c-1} \in \mathbb{R}$ sono soluzioni dell'equazione $x^2 + 1 = c$, si conclude che l'immagine di f è $[1, +\infty)$. Pertanto scegliendo $I = [1, +\infty)$, si ha che f è ben definita (ha codominio I) ed è surgettiva.

Esercizio 1.3. *Calcola la derivata della funzione*

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1 + x^2}.$$

Ricordando la regola della derivata di funzione composta

$$(h(g(x)))' = h'(g(x))g'(x),$$

si ha che

$$\frac{de^{2x}}{dx} = 2e^{2x}.$$

Inoltre, ricordando la regola della derivata del quoziente

$$\left(\frac{h}{g}(x)\right)' = \frac{h'(x)g(x) - h(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

si ottiene

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(1+x^2) - 2xe^{2x}}{(1+x^2)^2} = 2\frac{e^{2x}(1-x+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

2. Parte II

Esercizio 2.1. *La lunghezza del pelo di una specie di scoiattoli è determinata geneticamente da un gene con due possibili alleli: l'allele "L" dominante del pelo lungo e l'allele "c" recessivo del pelo corto. La popolazione che stai studiando soddisfa le ipotesi della legge di Hardy-Weinberg, e sai che il 75% degli alleli nella popolazione sono "L", e il 25% sono "c". Qual è la probabilità che uno scoiattolo preso a caso nella popolazione abbia il pelo corto*

(1) *non avendo nessun'altra informazione?*
(2) *sapendo che il padre ha il pelo lungo e la madre il pelo corto?*
(3) *sapendo soltanto che il padre ha il pelo lungo?*
(4) *sapendo soltanto che la madre ha il pelo corto?*
(5) *sapendo che il padre e la madre hanno il pelo corto?*

Innanzitutto, per fissare le notazioni e chiarirci le idee, diamo dei nomi alle probabilità a cui saremo interessati[1]. Indichiamo con $P_L = 75\% = \frac{3}{4}$ la probabilità che un allele sia "L", con $P_c = 25\% = \frac{1}{4}$ la probabilità che sia "c", e con P_{LL}, P_{Lc}, P_{cc} le probabilità dei tre genotipi. Siccome l'allele del pelo lungo è dominante, le probabilità dei due fenotipi (pelo lungo e pelo corto) sono $P_{FL} = P_{LL} + P_{Lc}$, e $P_{Fc} = P_{cc}$.

La legge di Hardy-Weinberg ci dà alcune relazioni tra le probabilità di alleli e genotipi. In particolare[2]:

$$P_{LL} = p_L^2 = \frac{9}{16}; \quad P_{Lc} = 2P_LP_c = \frac{3}{8}; \quad P_cc = P_c^2 = \frac{1}{16}.$$

Inoltre la legge di Hardy-Weinberg ci dice anche che nelle generazioni successive questa suddivisione di genotipi resterà immutata.

Calcoliamo ancora la presenza dei fenotipi nella popolazione, prima di affrontare l'esercizio:

$$P_{FL} = P_{LL} + P_{Lc} = \frac{15}{16}; \quad P_{Fc} = P_{cc} = \frac{1}{16}.$$

(1) Non avendo ulteriori informazioni, la probabilità di uno scoiattolo di avere il pelo corto è

$$P_1 = P_{Fc} = \frac{1}{16} = 6.25\%,$$

sia in questa sia nelle generazioni future...

(2) Sapendo che il padre ha il pelo lungo e la madre il pelo corto. La madre ha genotipo "cc". Il padre può avere genotipo "LL" (e in questo caso il figlio avrà necessariamente il pelo lungo) o "Lc"(e in questo caso il figlio avrà il pelo corto con probabilità del 50%). Vediamo pertanto qual è la probabilità che il padre

[1] Può sembrare una perdita di tempo, ma quando ti accorgerai che chiamando $P(L)$ tre cose diverse (la probabilità che un allele sia "L", la probabilità che uno scoiattolo abbia fenotipo pelo lungo, e la probabilità che un scoiattolo abbia genotipo omozigote dominante "LL") si incorre in frequenti spiacevoli errori, cambierai idea

[2] Attenzione: le seconde uguaglianze sono conseguenze dei nostri dati sulla presenza degli alleli, non della legge di Hardy-Weinberg!

sia eterozigote *sapendo che* ha il pelo lungo. Quello che vogliamo calcolare è una probabilità condizionata:

$$P(Lc|FL) = \frac{P(Lc \cap FL)}{P_{FL}} = \frac{P_{Lc}}{P_{FL}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{15}{16}} = \frac{2}{5}.$$

Pertanto la probabilità cercata è (la metà della precedente)

$$P_2 = \frac{1}{2} P(Lc|FL) = \frac{1}{5} = 20\%.$$

(3) Sapendo che il padre ha il pelo lungo. Il figlio può avere il pelo corto solo se il padre è eteroziogote (e ciò accade nel 40% dei casi, vedi punto (2)) e la madre è eterozigote (questo succede con probabilità $\frac{3}{8}$; il figlio avrà il pelo corto in un caso su quattro, quando sia il padre che la madre gli passano l'allele recessivo) o omozigote recessiva (questo succede con probabilità $\frac{1}{16}$; il figlio in questo caso avrà il pelo corto in un caso su due). Pertanto:

$$P_3 = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \cdot 12\right) = \frac{1}{20} = 5\%.$$

(4) Sapendo che la madre ha il pelo corto. Il figlio può avere il pelo corto solo se il padre è eterozigote (questo succede con probabilità $\frac{3}{8}$; il figlio avrà il pelo corto in un caso su due) o omozigote recessiva (questo succede con probabilità $\frac{1}{16}$; il figlio in questo caso avrà necessariamente il pelo corto). Pertanto:

$$P_4 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \cdot 1 = \frac{1}{4} = 25\%.$$

(5) Se sia il padre che la madre hanno il pelo corto, il figlio ha necessariamente il pelo corto[3]! Quindi

$$P_5 = 1 = 100\%.$$

Esercizio 2.2. *Vuoi studiare se c'è una relazione fra la lunghezza della proboscide degli elefanti indiani e la superficie delle loro orecchie. Hai avuto accesso a uno zoo dove ti hanno permesso di misurare tre elefanti, ottenendo le seguenti coppie di dati:* $(1 \text{ m}, 0.36 \text{ m}^2)$, $(0.8 \text{ m}, 0.25 \text{ m}^2)$, $(1.8 \text{ m}, 1 \text{ m}^2)$. *Supponendo che la superficie delle orecchie dipenda in modo quadratico dalla lunghezza della proboscide, trova la funzione che esprime questa relazione. Secondo te, la relazione che hai ottenuto è realistica? Perchè?*

La generica funzione quadratica è $S = aL^2 + bL + c$. Troviamo a, b, c imponendo il passaggio per i punti dati si ottiene[4]

$$\begin{cases} 0.36 = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \\ 0.25 = a \cdot (0.8)^2 + b \cdot 0.8 + c \\ 1 = a \cdot (1.8)^2 + b \cdot 1.8 + c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 0.25 \\ b = 0.1 \\ c = 0.01 \end{cases}$$

Pertanto $S = 0.25L^2 + 0.1L + 0.01 = (0.5L + 0.1)^2$.

Condizioni di sensatezza per la funzione trovata sono sicuramente che la lunghezza della proboscide sia sempre positiva ($L \geq 0$) e che l'area delle orecchia sia positiva ($S \geq 0$). La seconda condizione è sempre verificata, come si vede dalla seconda forma in cui abbiamo espresso S in funzione di L. Bisogna pertanto richiedere che $L \geq 0$. A te decidere poi (da ulteriori misure e osservazioni) se la relazione che hai ottenuto è effettivamente sensata...

[3] Attenzione: scambiando "lungo" a "corto", non è vero... perchè?

[4] Risolvi tu il sistema per esercizio

Esercizio 2.3. *Studiando la percentuale di umidità nell'aria in funzione dei millimetri di pioggia nella stagione dei monsoni, giungi alla conclusione che la percentuale U di umidità dipende dai millimetri di pioggia secondo la funzione*

$$U(x) = 50 + 50\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Studia la funzione U (anche per millimetri negativi, utile nei deserti).

Dominio. L'unica cosa da verificare è che il denominatore non si annulli. Ora, $x^2 + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dato che entrambi gli addendi sono positivi. Quindi $D = \mathbb{R}$.

Simmetrie. Vediamo se $U(x)$ è pari o dispari:

$$U(-x) = 50 + 50\frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = 50 + 50\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = U(x),$$

ovvero $U(x)$ è pari. Quindi ci basta studiare U per $x \geq 0$.

Segno. Per studiare il segno riscriviamo $U(x)$ come

$$U(x) = \frac{100x^2}{x^2 + 1}$$

Numeratore e denominatore sono sempre positivi, quindi $U(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, $U(0) = 0$.

Limiti. Dobbiamo studiare il limite per x che tende a $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} U(x) = \left[\frac{100 \cdot \infty}{\infty + 1}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Il limite è in forma indeterminata "infinito-su-infinito". Raccogliendo x^2 al denominatore, otteniamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} U(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{100x^2}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{100}{1 + \frac{1}{x^2}} = 100.$$

Crescenza. Per studiare la crescenza, dobbiamo calcolare la derivata prima di $U(x)$ e studiarne il segno.

$$U'(x) = 100\frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = 400\frac{x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Il denominatore è sempre positivo, e il numeratore è positivo per $x > 0$. $U(x)$ è crescente in $[0, +\infty)$ (e decrescente prima, dato che U è pari). Infine, 0 è punto di minimo.

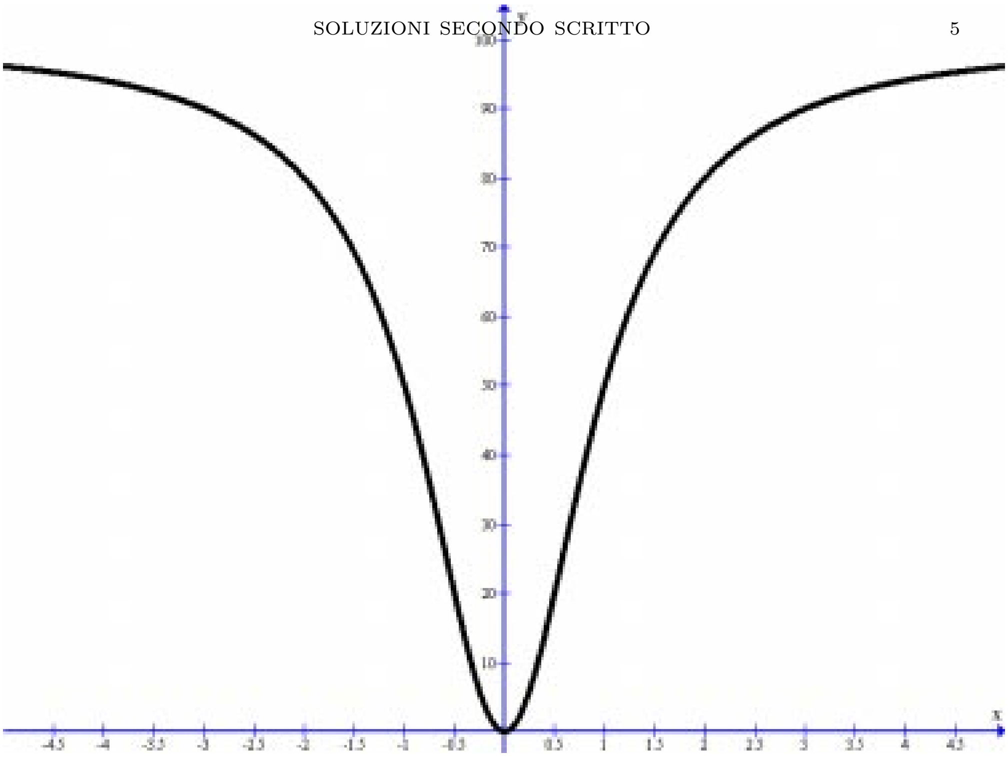
Dai dati raccolti finora già sappiamo che $0 \leq U(x) < 100$.

Concavità. Per studiare la concavità, dobbiamo calcolare la derivata seconda di $U(x)$ e studiarne il segno.

$$U''(x) = 400\frac{(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1)2x \cdot x}{(x^2 + 1)^4} = 800\frac{-3x^2 + 1}{(x^2 + 1)^3}.$$

Il denominatore è sempre positivo. Il numeratore è positivo per $-3x^2 + 1 \geq 0$, ovvero $x^2 \leq \frac{1}{3}$, ovvero per $|x| \leq \sqrt{\frac{1}{3}}$. Per tali valori, U è convessa. Per $|x| > \sqrt{\frac{1}{3}}$ la funzione è concava, e $x_\pm = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ sono punti di flesso (a tangenza obliqua).

Le informazioni raccolte sono riassunte nel grafico.


y
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
x
-4.5
-4
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5