

MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B
PROF. MARCO ABATE
PRIMO COMPITINO — SOLUZIONI TESTO B

1. PARTE I

Esercizio 1.1. *Se la popolazione di una città aumenta del 50% nel 2006 e poi del 20% nel 2007, di quanto è aumentata complessivamente nel biennio 2006-2007?*

Soluzione. Detta P la popolazione all'inizio del 2006, l'aumento complessivo nel biennio 2006-2007 è dato da

$$\left(1 + \frac{20}{100}\right) \left(1 + \frac{50}{100}\right) P = \left(1 + \frac{85}{100}\right) P.$$

La popolazione è quindi aumentata del 85%.

Esercizio 1.2. *Se un rettangolo ha lati di lunghezza $14 \leq L_1 \leq 16$ e $22 \leq L_2 \leq 24$, quali sono il valore stimato e l'errore assoluto dell'area del rettangolo?*

Soluzione. Essendo l'area del rettangolo uguale al prodotto dei lati, cioè $A = L_1 L_2$, si ha

$$14 \cdot 22 = 308 \leq A \leq 16 \cdot 24 = 384.$$

Il valore stimato sarà quindi $(308 + 384)/2 = 346$, con un errore assoluto pari a $(384 - 308)/2 = 38$.

Esercizio 1.3. *Quanti sono i possibili anagrammi (anche privi di senso) della parola "chimica"?*

Soluzione. Notiamo che la parola *chimica* ha 7 lettere, tra cui 2 *c* e 2 *i*. Pertanto i possibili anagrammi sono

$$\frac{7!}{2!2!} = 1260.$$

2. PARTE II

Esercizio 2.1. *Nel 2006, un campo di 400 m^2 viene coltivato per il 40% a carciofi, per il 20% a carote e per il resto a pomodori. Un m^2 di terreno produce in un anno 5 kg di carciofi, 8 kg di carote, e 10 kg di pomodori.*

- (1) *Quanti kg di pomodori vengono prodotti nel 2006?*
- (2) *Nel 2007, metà del campo viene coltivata a carote, il 20% a carciofi e il resto a pomodori. Di quanto è aumentata in percentuale la produzione di carote rispetto al 2006?*
- (3) *Se la percentuale di terreno dedicata ai carciofi nel 2007 è nota con un errore assoluto dell'1%, fra quali valori può variare la produzione totale di carciofi nel 2007?*
- (4) *Nel 2008 il proprietario del campo decide di acquistare un campo vicino, così da aumentare la superficie coltivabile del 25%. Quale percentuale di questa nuova superficie deve destinare alla coltivazione di pomodori se vuole aumentare la produzione di pomodori del 4% rispetto al 2007?*

Soluzione.

- (1) Nel 2006 viene coltivato a pomodori il $(100 - 60)\% = 40\%$ del campo, che corrisponde a $40 \cdot 400/100 = 160 \text{ m}^2$. Vengono quindi prodotti 1600 kg di pomodori.
- (2) La produzione di carote passa, nel 2007, dal 20% al 50%, con un aumento percentuale del $(\frac{50-20}{20} \cdot 100) = 150\%$.
- (3) La produzione di carciofi nel 2007 è pari a $5 \cdot 20 \cdot 400/100 = 400 \text{ kg}$, con un errore assoluto di $5 \cdot 400/100 = 20 \text{ kg}$. La produzione effettiva varierà quindi tra 380 kg e 420 kg.
- (4) Il nuovo campo ha una superficie di $25 \cdot 400/100 = 100 \text{ m}^2$. Nel 2007 viene coltivato a pomodori il $(100 - 50 - 20) = 30\%$ del campo, che corrisponde a $30 \cdot 400/100 = 120 \text{ m}^2$. Per aumentare la produzione del 4% è necessario aumentare la superficie coltivata a pomodori di $4 \cdot 120/100 = 4,8 \text{ m}^2$, corrispondenti al $4,8 \cdot 100/100 = 4,8\%$ del nuovo campo.

Esercizio 2.2. *Un giocatore di scopa pesca 3 carte da un mazzo di 40 carte.*

- (1) *Qual è la probabilità che la prima carta pescata sia un re?*
- (2) *Qual è la probabilità che peschi almeno un re?*
- (3) *Qual è la probabilità che peschi due re e un asso?*

Soluzione.

- (1) Essendoci 4 re tra le 40 carte, la probabilità che la prima carta pescata sia un re è $\frac{4}{40} = \frac{1}{10}$.
- (2) Calcoliamo la probabilità P dell'evento complementare, che corrisponde a non pescare nemmeno un re:

$$P = \frac{36}{40} \frac{35}{39} \frac{34}{38}$$

La probabilità di pescare almeno un re è quindi uguale a $1 - P$.

- (3) La probabilità di pescare i re e l'asso in un certo ordine (ad esempio prima un re, poi l'asso, poi un re) è

$$P = \frac{4}{40} \frac{4}{39} \frac{3}{38}$$

Essendoci 3 ordinamenti possibili, corrispondenti alla posizione dell'asso, la probabilità cercata è $3P$.

Esercizio 2.3. *La lunghezza degli artigli di una specie di ocelotti è determinata geneticamente da un gene con due possibili alleli: l'allele "L" dominante degli artigli lunghi e l'allele "c" recessivo degli artigli corti. La popolazione che stai studiando soddisfa le ipotesi della legge di Hardy-Weinberg, e sai che il 40% degli alleli nella popolazione sono "L" e il 60% sono "c". Qual è la probabilità che un ocelotto preso a caso nella popolazione abbia gli artigli corti*

- (1) *non avendo nessun'altra informazione?*
- (2) *sapendo che il padre ha gli artigli lunghi e la madre gli artigli corti?*
- (3) *sapendo soltanto che il padre ha gli artigli lunghi?*
- (4) *sapendo soltanto che la madre ha gli artigli corti?*
- (5) *sapendo che il padre e la madre hanno gli artigli corti?*

Soluzione.

- (1) Usando la legge di Hardy-Weinberg, calcoliamo la probabilità dei diversi genotipi:

$$\begin{aligned} p_{cc} &= p_c^2 = \frac{36}{100} \\ p_{Lc} &= 2p_L p_c = \frac{48}{100} \\ p_{LL} &= p_L^2 = \frac{16}{100}. \end{aligned}$$

La probabilità che un ocelotto preso a caso abbia gli artigli corti è

$$p_{cc} = \frac{36}{100}.$$

- (2) Il genotipo del padre può essere p_{LL} o p_{Lc} , mentre quello della madre è necessariamente p_{cc} . La probabilità che il padre abbia gli artigli lunghi e la madre gli artigli corti è quindi

$$(p_{LL} + p_{Lc}) p_{cc}.$$

Se il padre ha genotipo p_{LL} il figlio ha sempre gli artigli lunghi, mentre se il padre ha genotipo p_{Lc} il figlio ha gli artigli corti con probabilità $1/2$. Pertanto, la probabilità condizionata cercata è

$$\frac{\frac{1}{2} p_{Lc} p_{cc}}{(p_{LL} + p_{Lc}) p_{cc}} = \frac{3}{8}.$$

- (3) Come per il punto precedente, il genotipo del padre può essere p_{LL} o p_{Lc} . Se è p_{LL} , il figlio ha sempre gli artigli lunghi, indipendentemente dal genotipo della madre. Se invece è p_{Lc} , la lunghezza degli artigli dipende dal genotipo della madre: in particolare, se la madre è p_{LL} il figlio ha sempre gli artigli lunghi, se la madre è p_{Lc} il figlio ha gli artigli corti con probabilità $1/4$, e se la madre è p_{cc} il figlio ha gli artigli corti con probabilità $1/2$. La probabilità condizionata cercata è quindi

$$\frac{p_{Lc} \left(\frac{1}{4} p_{Lc} + \frac{1}{2} p_{cc} \right)}{p_{LL} + p_{Lc}} = \frac{9}{40}.$$

- (4) Ragionando come sopra, se il padre ha genotipo p_{LL} il figlio ha sempre gli artigli lunghi, se il padre ha genotipo p_{Lc} il figlio ha gli artigli corti con probabilità $1/2$, mentre se il padre ha genotipo p_{cc} il figlio ha sempre gli artigli corti. La probabilità condizionata è quindi

$$\frac{\left(\frac{1}{2} p_{Lc} + p_{cc} \right) p_{cc}}{p_{cc}} = \frac{3}{5}.$$

- (5) In questo caso il figlio ha sempre gli artigli corti, la probabilità è quindi 1.