Correzione primo compitino, testo B

1 Parte 1

Esercizio 1.1. Facciamo riferimento alle pagine 22 e 23 del libro di testo. Quando si ha a che fare con la moltiplicazione o la divisione di misure bisogna fare attenzione, poiché gli errori potrebbero influire sul risultato. Se l'errore relativo è piccolo (di solito dell'ordine di 10^{-1}) allora il valore stimato del prodotto (o del quoziente) è approssimativamente uguale al prodotto (o al quoziente) dei valori stimati. La prima cosa da controllare, quindi, è che l'errore relativo sia piccolo. Indicheremo con $e_{r,L}$ l'errore relativo della misura dello spazio, e con $e_{r,v}$ l'errore relativo della misura della velocità. Calcoliamoli:

$$e_{r,L} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60} \quad e_{r,v} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}.$$

Vale quindi il discorso fatto sopra. Per trovare la distanza percorsa L, si moltiplicano la velocità v ed il tempo di percorrenza t; quindi, per trovare il tempo di percorrenza si divide la distanza percorsa L per la velocità v. Il tempo stimato è quindi:

$$t \simeq 120\,\mathrm{km}\frac{1}{80}\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{km}} = \frac{3}{2}\,\mathrm{h} = 90\,\mathrm{min}.$$

Dobbiamo ora calcolare l'errore assoluto. Nel caso di errori relativi piccoli, sappiamo che l'errore relativo del prodotto (o del quoziente) è circa uguale alla somma degli errori relativi dei fattori, ed è quindi 19/240. L'errore assoluto sulla stima del tempo sarà quindi:

$$e_{\mathrm{ass}} \simeq 90\,\mathrm{min} \cdot \frac{19}{240} = 7\,\mathrm{min} + 7.5\,\mathrm{sec}.$$

Quindi la misura del tempo è:

$$90\,\mathrm{min} \pm (7\,\mathrm{min} + 7.5\,\mathrm{sec}).$$

Esercizio 1.2. Il problema essenziale alla base di questa domanda è la comprensione del testo. Riformulatelo in questo modo: se ho ottenuto "due sei" lanciando due dadi, è possibile che io abbia ottenuto "un uno ed un tre"? Evidentemente no, quindi i due eventi sono fortemente dipendenti: il verificarsi di uno rende impossibile il verificarsi dell'altro. Verifichiamolo con un semplice calcolo, Per definizione, se due eventi sono indipendenti, la probabilità dell'intersezione è il prodotto delle loro probabilità; in formule, se indichiamo con E_1 il primo evento e con E_2 il secondo evento, dobiamo avere che

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)p(E_2).$$

Verifichiamo che in questo caso l'uguaglianza è falsa. Se indichiamo con E_1 l'evento "ottenere due sei" la sua probabilità è $P(E_1) = (1/6)^2 = 1/36$. La probabilità dell'evento E_2, "ottenere un uno ed un tre" è invece $P(E_2) = 2(1/6)^2 = 1/18$, dove il 2 a moltiplicare deriva dal fatto che ci sono due modi per ottenere un uno e un tre lanciando due dadi. Infine, poiché non possiamo avere "due sei" ed "un uno e un tre" contemporaneamente, la probabilità dell'intersezione dei due eventi è $P(E_1 \cap E_2) = 0$. Perciò:

$$P(E_1 \cap E_2) = 0 \neq \frac{1}{648} = P(E_1)P(E_2);$$

quindi i due eventi non sono indipendenti.

Esercizio 1.3. Per rispondere a questa domanda è necessario avere chiara la definizione di funzione surgettiva (pag. 112 del vostro testo). Una funzione $f\colon A \to B$ si dice **surgettiva** se ogni elemento del codominio è immagine di (almeno) un elemento del dominio. In altre parole, dire che f è surgettiva significa che per ogni $b \in B$ esiste un a appartenente ad A tale che $f(a) = b$. Per mostrare che la funzione non è surgettiva basta allora esibire un esempio. Poiché il codominio della funzione è tutto $\mathbb{R}$ prendiamo l'elemento -1; l'equazione $x^6 = -1$ non ha soluzioni reali, quindi non esiste nessun elemento del dominio la cui immagine è -1.

2 Parte 2

Esercizio 2.1. Per la parte teorica realtiva alle percentuali rimandiamo alla sezione sulle percentuali del vostro libro di testo, da pag. 26.

1. Per calcolare la quota di mercato Q_{marca} ottenuto da ciascuna marca si usa la formula:

$$Q_{\text{marca}} = \frac{\text{Numero confezioni vendute dalla marca}}{\text{Numero totale di confezioni vendute}} \cdot 100. \tag{1}$$

   Poiché abbiamo solo due marche, abbiamo che il numero totale di confezioni vendute è la somma delle confezioni vendute da Pomo e di quelle vendute da Doro, cioè $960 + 240 = 1200$ confezioni. Otteniamo quindi che Pomo ha una quota di mercato del $240/1200 = 20\%$. Essendoci solo due marche, abbiamo:

$$\begin{aligned} Q_{\text{Doro}} &= \frac{\text{Numero confezioni Doro}}{\text{Numero totale confezioni}} \cdot 100 \\ &= \frac{\text{Numero totale confezioni} - \text{Numero confezioni Pomo}}{\text{Numero totale confezioni}} \cdot 100 \\ &= 100 - S_{\text{Pomo}}. \end{aligned}$$

   La quota di mercato di Doro è quindi dell' 80%.

2. Questo punto è il problema inverso rispetto al punto precedente. Invertiamo la formula (1) ottenendo:

$$\text{Numero confezioni Pomo} = \frac{Q_{\text{Pomo}} \cdot \text{Numero totale di confezioni}}{100}.$$

Quindi, il numero di confezioni di Pomo vendute a Febbraio è $0,2 \cdot 1525 = 305$. Poichè abbiamo due sole marche, il numero di confezioni vendute da Doro è $1525 - 305 = 1220$.

3. La quota di mercato di Pomo è calcolato con un errore assoluto di 0.2. Questo significa che la misura della quota di mercato è $20 \pm 0.2\%$. Quindi il numero di confezioni vendute varia fra:

$$\frac{19.8}{100} \cdot 1525 \simeq 302 \quad \text{e} \quad \frac{20.2}{100} \cdot 1525 \simeq 308.$$

4. Innanzitutto, per risolvere il problema, abbiamo bisogno di calcolare la quota di mercato di Pomo a marzo. Dal testo del problema sappiamo che la quota di mercato di Pomo a marzo è diminuita del 15% rispetto a febbraio ed è quindi pari a:

$$\left(1 - \frac{15}{100}\right) \cdot \frac{20}{100} = 0.17.$$

La quota di mercato di Doro è quindi dell'83%. Come già fatto nel punto 2, data la quota di mercato ed il numero totale di confezioni vendute possiamo calcolare il numero di confezioni vendute da Doro con la seguente formula:

$$\text{Numero confezioni Doro} = \frac{Q_{\text{Doro}} \cdot \text{Numero totale di confezioni}}{100}.$$

Il numero di confezioni vendute da Doro sarà quindi $0.83 \cdot 1100 = 913$ e quelle vendute da Pomo $1100 - 913 = 187$.

5. La media delle confezioni vendute da Doro nei mesi tra gennaio e marzo viene calcolata utilizzando la seguente formula, dove per N_{mese} si intende il numero di confezioni vendute nel mese:

$$\text{Media} = \frac{N_{\text{gennaio}} + N_{\text{febbraio}} + N_{\text{marzo}}}{3}.$$

Le definizioni di media e di varianza sono a pag. 135 e 139 del vostro libro. Possiamo ora calcolare la media:

$$\frac{960 + 1220 + 913}{3} = 1031.$$

Per calcolare la varianza possiamo utilizzare la formula:

$$\frac{(N_{\text{gennaio}} - \text{Media})^2 + (N_{\text{febbraio}} - \text{Media})^2 + (N_{\text{marzo}} - \text{Media})^2}{3}.$$

La varianza è $19881 + 2/3$.

6. I dati necessari sono tutti disponibili. Fissiamo innanzitutto un po' di notazione: con $N_{P,A}$ ed $N_{P,M}$ indicheremo rispettivamente il numero di confezioni vendute da Pomo ad aprile ed a maggio; con $Q_{P,A}$ e $Q_{P,M}$ indicheremo la quota di mercato ad aprile ed a maggio e con $N_{T,A}$ e $N_{T,M}$ indicheremo rispettivamente il numero totale di confezioni vendute

ad aprile e maggio. Dal testo del problema sappiamo che la quota di mercato è diminuita dell'10% rispetto ad aprile, quindi

$$Q_{P,M} = 0.9 \cdot Q_{P,A}.$$

Lo share è il rapporto tra le confezioni vendute da Pomo nel mese ed il numero totale degli spettatori, dunque:

$$\frac{N_{P,M}}{N_{T,M}} = 0.9\frac{N_{P,A}}{N_{T,A}}.$$

Sappiamo inoltre che il numero totale delle confezioni vendute è aumentato del 20%, dunque $N_{T,M} = 1.2 \cdot N_{T,A}$. Quindi:

$$\frac{N_{P,M}}{1.2 \cdot N_{T,A}} = 0.92\frac{N_{P,A}}{N_{T,A}}.$$

Semplificando $N_{T,A}$ otteniamo:

$$N_{P,M} = 1.2 \cdot 0.9 N_{C,A}.$$

Poichè $1.2 \cdot 0.9 = 6/5 \cdot 9/10 = 54/50$ è maggiore di 1 il numero di confezioni vendute da Pomo è aumentato tra aprile e maggio.

Esercizio 2.2. La prima cosa da notare è che il nostro amico hacker ha ridotto la scelta dei mesi solo a mesi che hanno 30 giorni.

1. In un mese di 30 giorni vi è solo un giorno che comincia col 3, quindi la probabilità che la prima cifra sia 3 è 1/30; i giorni che cominciano con 2 sono invece 10, quindi abbiamo la probabilità è $10/30 = 1/3$.

2. Per questo punto si può fare riferimento a pag. 91 del vostro testo. Questo tipo di esperimento si può modellizzare con un processo di Bernoulli. Si può pensarlo in questo modo: indovinare una cifra è un esperimento che può riuscire con probabilità $p = 1/10$ e fallire con probabilità $q = 9/10$. Ripetiamo l'esperimento quattro volte, una per ogni cifra; inoltre, le ripetizioni sono indipendenti. Quindi la probabilità che esattamente 3 cifre su 4 coincidano è:
$$\binom{4}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{36}{10^4},$$
mentre la probabilità che tutte e quattro le cifre coincidano è $\frac{1}{10^4}$, per cui la probabilità che almeno 3 cifre su 4 coincidano è
$$\frac{36}{10^4} + \frac{1}{10^4} = \frac{37}{10^4}.$$

3. La prima cosa da capire è quali posizioni siano ammissibili per la sequenza 1011 e quali no. Le scremeremo partendo da quelle con 1011 posizionato all'estrema sinistra e muovendoci verso destra.

   - Le sequenze del tipo $10/11/xxxx$ sono ammissibili, in quanto novembre è uno dei mesi della lista dell'amico hacker. Le sequenze di questo tipo sono 10^4, in quanto al posto di ciascuna delle x posso sostituire una cifra tra 0 e 9.

- Le sequenze del tipo $x1/01/1xxx$ non sono ammissibili in quanto gennaio non è nella lista dei mesi dataci dal nostro amico.
- Le sequenze del tipo $xx/10/11xx$ non sono ammissibili in quanto ottobre non è nella lista dei mesi.
- Le sequenze del tipo $xx/x1/011x$ sono ammissibili soltanto se la prima cifra del mese è 1. Se fosse 0 il mese in oggetto sarebbe gennaio che non è nella nostra lista. Le sequenze di questo tipo sono $30 \cdot 10 = 300$.
- Le sequenze del tipo $xx/xx/1011$ sono ammissibili. Le sequenze di questo tipo sono $30 \cdot 4$, poichè possiamo scegliere tra 30 giorni e 4 mesi.

In totale, le sequenze che contengono 1011 sono 10420.

4. La probabilità che la password non contenga la sequenze 1011 è

$$1 - \frac{10420}{30 \cdot 4 \cdot 10^4},$$

dove $30 \cdot 4 \cdot 10^4$ è il numero totale di sequenze ammissibili.

Esercizio 2.3. 1. A pag. 71 del vostro libro potete trovare la legge di Hardy-Weinberg. Utilizzando la legge di Hardy-Weinberg calcoliamo quindi la probabilità dei singoli alleli. Indicheremo con p_M indicherà la probabilità dell'allele marrone, con p_{MA} indicheremo la probabilità del **genotipo** MA, con F_R la probabilità del **fenotipo** rosastro e così via. La legge di Hardy-Weinberg ci dice:

$$p_{MM} = p_M^2 \quad p_{AA} = p_A^2 \quad p_{BB} = p_B^2 \tag{2}$$

$$p_{AB} = 2p_Ap_B \quad p_{MA} = 2p_Mp_A \quad p_{MB} = 2p_Mp_B.$$

Dalle relazioni di dominanza tra gli alelli otteniamo:

$$F_M = p_{MM} + p_{MA} + p_{MB}, \quad F_A = p_{AA}$$

$$F_B = p_{BB} \quad F_R = p_{AB}.$$

Nel testo del problema ci vengono date le probabilità dei diversi fenotipi:

$$F_M = 0.19, \quad F_A = 0.25, \quad F_B = 0.16, \quad F_R = 0.40.$$

Possiamo ora ricavare le probabilità dei singoli alleli; $F_A = p_{AA} = p_A^2 = 0.25$ implica che $p_A = 0.5$; nello stesso modo $p_B^2 = 0.16$ implica $p_B = 0.4$. Infine, siccome, chiaramente,

$$p_A + p_B + p_M = 1$$

abbiamo $p_M = 1 - 0.4 - 0.5 = 0.1$. Usando le formule (2) ricaviamo

$$p_{MM} = 0.01 \quad p_{AA} = 0.25 \quad p_{BB} = 0.16$$

$$p_{MA} = 0.10 \quad p_{MB} = 0.08 \quad p_{AB} = 0.40.$$

2. Si tratta di una probabilità condizionata. Gli eventi coinvolti sono "il figlio ha il manto rosastro" ed "il padre ha il manto arancione e la madre ha il manto rosastro". Dobbiamo prima di tutto calcolare qual è la probabilità dell'intersezione, cioè che il figlio abbia manto rosastro e allo stesso tempo suo padre abbia manto arancione e la madre manto rosastro. Poichè l'arancio è un carattere recessivo necessariamente il genotipo del padre è AA. Allo stesso modo, poichè il fenotipo rosastro è codificato solo dal genotipo AB il genotipo della madre è necessariamente AB. Per la legge di disgiunzione di Mendel, metà dei figli di questa coppia avrà manto rosastro. Siccome padre e madre hanno genotipi indipendenti, come pure è indipendente quale cromosoma passano ai figli, la probabilità dell'intersezione è:
$$\frac{1}{2} \cdot p_{AA} \cdot p_{AB}.$$
La probabilità che i genitori abbiano il fenotipo citato sono date da $F_A = P_{AA}$ e $F_R = P_{AB}$ quindi la probabilità condizionata cercata è
$$\frac{\frac{1}{2} \cdot p_{AA} \cdot p_{AB}}{p_{AA} \cdot p_{AB}} = \frac{1}{2}.$$

3. Come sopra, si tratta di una probabilità condizionata. Gli eventi coinvolti sono "il figlio ha manto rosastro" ed "entrambi i genitori hanno manto marrone". Calcoliamo la probabilità dell'intersezione dei due eventi. Perché genitori con manto marrone abbiano un figlio con manto rosastro l'unica possibilità è che abbiano rispettivamente genotipi MA ed MB. Per il principio di disgiunzione di Mendell e poiché è indifferente quale dei due genitori abbia genotipo MA e quale MB, la probabilità che i genitori abbiano manto marrone ed il figlio abbia manto rosastro è quindi
$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot p_{MA} \cdot p_{MB}.$$
Ora applichiamo la definizione della probabilità condizionata e dividiamo per la probabilità che entrambi i genitori abbiano fenotipo manto marrone. Dunque:
$$\frac{\frac{1}{2} \cdot p_{MA} \cdot p_{MB}}{F_M^2} = \frac{(1/2)(10/100)(8/100)}{(19/100)^2} = \frac{40}{(19)^2}.$$

4. Il carattere arancio è recessivo, quindi entrambi i genitori hanno genotipo AA. Di conseguenza la probabilità che abbiano un figlio con gli occhi gialli è 0.