Correzione primo compitino, testo B

31 gennaio 2011

1 Parte 1

Esercizio 1.1. Facciamo riferimento alle pagine 22 e 23 del libro di testo. Quando si ha a che fare con la moltiplicazione o la divisione di misure bisogna fare attenzione, poiché gli errori potrebbero influire sul risultato. Se l'errore relativo è piccolo (di solito dell'ordine di 10^{-1}) allora il valore stimato del prodotto (o del quoziente) è approssimativamente uguale al prodotto (o al quoziente) dei valori stimati, mentre l'errore relativo del prodotto (o del quoziente) è la somma degli errori relativi. La prima cosa da controllare, quindi, è che l'errore relativo sia piccolo. Indicheremo con $e_{r,D}$ l'errore relativo della misura del peso specifico del bronzo, e con $e_{r,V}$ l'errore relativo della misura del volume. Ora, per calcolare l'errore relativo $e_{r,D}$ abbiamo bisogno di conoscere il valore stimato e l'errore assoluto della misura del peso specifico del bronzo. Il valore stimato della misura è

$$\frac{7.5 + 8.5}{2} \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 8 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

e l'errore assoluto è quindi di $0.5\text{kg}/\text{dm}^3$. La misura del peso specifico del bronzo è quindi $8 \pm 0.5\text{kg}/\text{dm}^3$. Calcoliamo ora gli errori relativi:

$$e_{r,D} = \frac{0.5}{8} = \frac{1}{16} \quad e_{r,V} = \frac{0.25}{4} = \frac{1}{16}.$$

Vale quindi il discorso fatto sopra sul calcolo dell'errore assoluto di un prodotto. Per trovare il peso P, si moltiplica il volume per il peso specifico. Il peso stimato è quindi:

$$P \simeq 8 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot 4\,\text{dm}^3 = 32\text{kg}.$$

Dobbiamo ora calcolare l'errore assoluto. Nel caso di errori relativi piccoli, sappiamo che l'errore relativo del prodotto (o del quoziente) è circa uguale alla somma degli errori relativi dei fattori, ed è quindi $2/16 = 1/8$. L'errore assoluto sulla stima del peso sarà quindi:

$$e_{\text{ass}} \simeq 32\text{kg}\frac{1}{8} = 4\text{kg}.$$

Quindi la misura del peso è:

$$32 \pm 4\,\text{kg}.$$

Esercizio 1.2. Per risolvere questo esercizio bisogna ricordarsi (formula 2.5 pag. 66 del vostro libro) che per due eventi A e B vale la seguente formula per la probabilità dell'unione

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

e quindi che

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Proviamo, usando i dati in nostro possesso,a vedere che informazioni possiamo ricavare da quest'ultima equazione:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{17}{56} = \frac{7 + 8 - 17}{56} = -\frac{2}{56}.$$

Per il secondo assioma della probabilità (P2 pag. 64) sappiamo che la probabilità di un evento deve essere un numero compreso tra 0 ed 1. Perciò non possono esistere due eventi A e B corrispondenti ai dati dell'esercizio.

Esercizio 1.3. La funzione $f(x) = 3x - 2$ è una funzione lineare non costante. La prima cosa che possiamo notare è che questa funzione è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ e quindi è iniettiva. Inoltre, per ogni valore C abbiamo che l'equazione

$$3x - 2 = C$$

ha soluzione

$$x = \frac{C + 2}{3} \tag{1}$$

quindi la funzione è suriettiva. Quindi la funzione $f(x) = 3x - 2$ è una funzione bigettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ed è invertibile. Per definizione, la funzione inversa è quella funzione che associa ad ogni elemento C dell'immagine l'elemento x del dominio tale per cui $3x - 2 = C$. Quindi la funzione

$$f^{-1}(C) = \frac{C + 2}{3}$$

ottenuta dall'equazione (1) è la funzione inversa cercata.

2 Parte 2

Esercizio 2.1. Per la parte teorica relativa alle percentuali rimandiamo alla lezione percentuali del vostro libro di testo, da pag. 26.

In tutto l'esercizio useremo la seguente notazione: N_{anno} indica il numero di individui totali della popolazione per l'anno indicato, $N_{g,\text{anno}}$ indica il numero di individui grigi e $N_{n,\text{anno}}$ indica il numero di individui neri. Inoltre indicheremo con $P_{g,\text{anno}}$ la percentuale di individui grigi per l'anno indicato e con $P_{n,\text{anno}}$ la percentuale di individui neri.

1. Per calcolare la percentuale di individui grigi nella popolazione nel 2008 usiamo la formula

$$P_{g,2008} = \frac{N_{g,2008}}{N_{2008}} \cdot 100. \tag{2}$$

   Il numero di individui della popolazione è la somma degli individui grigi e di quelli neri, cioè $960 + 240 = 1200$ individui. Otteniamo quindi che la percentuale di individui grigi è $240/1200 \cdot 100 = 20\%$. La percentuale di individui neri nel 2008 è quindi:

$$\begin{aligned} P_{n,2008} &= \frac{N_{n,2008}}{N_{2008}} \cdot 100 \\ &= \frac{N_{2008} - N_{g,2008}}{N_{2008}} \cdot 100 \\ &= 100 - P_{g,2008}. \end{aligned}$$

La percentuale di individui neri è quindi dell'80%.

2. Questo punto è il problema inverso rispetto al punto precedente. Invertiamo la formula (2) ottenendo:

$$N_{g,2009} = \frac{P_{g,2009} \cdot N_{2009}}{100}.$$

Quindi, il numero di individui grigi nel 2009 è di $0.2 \cdot 1525 = 305$ ed il numero di individui neri è $1525 - 305 = 1220$.

3. La percentuale di femmine è calcolata con un errore assoluto del 0.4%. Questo significa che la misura della percentuale è $20 \pm 0.4\%$. Quindi il numero di individui grigi varia fra:

$$0.196 \cdot 1525 \simeq 299 \quad \text{e} \quad 0.204 \cdot 1525 \simeq 311.$$

4. Il punto importante, qui, è leggere bene il testo. Il testo ci dice che la percentuale di individui grigi è diminuita del 15%; questo significa che

$$P_{g,2010} = \left(1 - \frac{15}{100}\right) P_{g,2009} = 0.85 \cdot P_{g,2009},$$

cioè che $P_{g,2010} = 0.85 \cdot 20\% = 17\%$. Come già fatto nel punto 2, dati la percentuale di individui grigi ed il numero totale di individui possiamo calcolare il numero di ratti grigi con la seguente formula:

$$N_{g,2010} = \frac{P_{g,2010} \cdot N_{2010}}{100}.$$

Il numero di individui grigi sarà quindi $0.17 \cdot 1100 = 187$ e quello degli individui neri di conseguenza sarà $1100 - 187 = 913$.

5. La media del numero di individui neri viene calcolata utilizzando la seguente formula:

$$\text{Media} = \frac{N_{n,2008} + N_{n,2009} + N_{n,2010}}{3}.$$

Le definizioni di media e di varianza sono a pag. 135 e 139 del vostro libro. Possiamo ora calcolare la media:

$$\frac{960 + 1220 + 913}{3} = 1031.$$

Per calcolare la varianza dobbiamo utilizzare la formula:

$$\frac{(N_{n,2008} - \text{Media})^2 + (N_{n,2009} - \text{Media})^2 + (N_{n,2010} - \text{Media})^2}{3}.$$

La varianza è quindi (approssimativamente) $18228,7$.

6. I dati necessari sono tutti disponibili. Sappiamo infatti che $N_{2011} = (1 + \frac{20}{100})N_{2010} = 1.2 \cdot N_{2010}$, mentre $P_{g,2011} = (1 - \frac{15}{100})P_{g,2010} = 0.85 \cdot P_{g,2010}$. Ora, come in 2, abbiamo che

$$\begin{aligned} N_{g,2011} &= P_{g,2011} \cdot N_{2011} = 0.85 \cdot P_{g,2010} \cdot 1.2 \cdot N_{2010} \\ &= 0.85 \cdot 1.2 \cdot P_{g,2010} \cdot N_{2010} = 0.85 \cdot 1.2 \cdot N_{g,2010}. \end{aligned}$$

Ora, abbiamo che $0.85 \cdot 1.2 = 1.02$ e quindi il numero di individui grigi è aumentato.

Esercizio 2.2. 1. La cosa da notare è che il fatto di poter scegliere sia tra le 21 lettere, sia tra le cifre da 1 a 9 significa che per ogni simbolo abbiamo, in generale, 30 possibili simboli tra cui scegliere. Quindi, per il principio base del calcolo combinatorio (pag. 81 del vostro libro) i possibili codici sono 30^4.

2. Per risolvere questo punto usiamo il fatto che in questa situazione la probabilità è di un evento è data da:

$$\frac{\text{Casi favorevoli}}{\text{Casi possibili}}.$$

Possiamo contare il numero di codici che contengono solo lettere: per il principio base del calcolo combinatorio sono 21^4. Quindi la probabilità che tutti i simboli di un codice preso a caso siano lettere è

$$\frac{\text{Codici composti solo da lettere}}{\text{Codici possibili}} = \frac{21^4}{30^4} = \left(\frac{7}{10}\right)^4.$$

Analogamente, poiché il numero di codici composti da sole cifre è 9^4 la probabilità che tutti i simboli siano cifre è

$$\frac{\text{Codici composti solo da cifre}}{\text{Codici possibili}} = \frac{9^4}{30^4} = \left(\frac{3}{10}\right)^4.$$

3. Di nuovo, ricordandoci che la probabilità di un evento è il rapporto tra i casi favorevoli ed i casi possibili dobbiamo contare i codici in cui $C2$ appare nelle prime due posizioni. Ora, questo significa contare tutti i codici del tipo $C2XX$ dove X è un simbolo qualsiasi dei 30 a nostra disposizione. Quindi i casi favorevoli sono 30^2 e la probabilità è quindi

$$\frac{\text{Codici con } C2 \text{ nelle prime due posizioni}}{\text{Codici possibili}} = \frac{30^2}{30^4} = \frac{1}{30^2}.$$

Ora, il problema di contare i codici in cui RR appare nelle prime due posizioni è assolutamente analogo. Come prima, stiamo contando tutti i codici del tipo $RRXX$ dove X è un simbolo qualsiasi dei 30 a nostra disposizione. Quindi i casi favorevoli sono 30^2 e la probabilità è quindi

$$\frac{\text{Codici con } RR \text{ nelle prime due posizioni}}{\text{Codici possibili}} = \frac{30^2}{30^4} = \frac{1}{30^2}.$$

Con un ragionamento analogo si vede che fissate le prime due posizioni di un codice, la probabilità che un codice preso a caso sia di quella forma è $1/30^2$.

4. Dobbiamo contare i codici con 1 cifra e 3 lettere. Per fare questo, dobbiamo prima di tutto contare in quanti modi possiamo scegliere una cifra e tre lettere; per il principio base del calcolo combinatorio, i modi sono $9 \cdot 21^3$. Poi, dobbiamo contare in quanti modi possiamo scegliere la posizione del codice in cui mettere la cifra scelta (e metteremo nell'ordine le lettere scelte nelle altre tre posizioni): sono chiaramente 4. Quindi in totale ci sono $4 \cdot 9 \cdot 21^3$ codici composti da una cifra e tre lettere, e la probabilità di scegliere a caso un codice con una cifra e tre lettere è dunque:
$$\frac{4 \cdot 9 \cdot 21^3}{30^4} = \frac{4 \cdot 3^5 \cdot 7^3}{3^4 \cdot 10^4} = \frac{3 \cdot 7^3}{4 \cdot 5^4} = \frac{1029}{2500}.$$
Un altro modo per rispondere a questa domanda era considerare il codice come una successione di quattro esperimenti, uno per ogni posizione. Ogni esperimento può dare due risultati possibili (lettera o numero), e gli esperimenti sono indipendenti fra loro. Si tratta quindi di un fenomeno di Bernoulli, e vogliamo calcolare la probabilità di esattamente 1 successo (1 cifra) su 4 esperimenti. La distribuzione binomiale ci dice che la risposta è
$$\binom{4}{1} \frac{9}{30} \left(\frac{21}{30}\right)^3 = \frac{1029}{2500} ,$$
come ottenuto precedentemente.

Esercizio 2.3.

1. A pag. 71 del vostro libro potete trovare la legge di Hardy-Weinberg. Indicheremo con p_A la probabilità dell'allele A, con p_{AB} indicheremo la probabilità del **genotipo** AB, con F_T la probabilità del **fenotipo** "piega la lingua in tutte le direzioni" e così via. La legge di Hardy-Weinberg ci dice:
$$p_{AA} = p_A^2 \quad p_{BB} = p_B^2 \quad p_{NN} = p_N^2 \tag{3}$$
$$p_{AB} = 2p_A p_B \quad p_{AN} = 2p_A p_N \quad p_{BN} = 2p_B p_N.$$
Dalle relazioni di dominanza tra gli alelli otteniamo:
$$F_A = p_{AA} + p_{AN}, \quad F_B = p_{BB} + p_{BN}, \quad F_T = p_{AB}, \quad F_N = p_{NN}.$$
Nel testo del problema ci vengono date le probabilità dei diversi fenotipi. Possiamo ora ricavare le probabilità dei singoli alleli; $F_N = p_N^2 = 0.16$ implica che $p_N = 0.4$. Abbiamo ora che $F_A = p_A^2 + 2p_A p_N = 0.2$; dato che conosciamo p_N questa si riduce ad un'equazione di secondo grado
$$p_A^2 + 0.8 p_A = 0.2,$$
la cui unica soluzione positiva è $p_A = 0.2$. Dal fatto che $p_A + p_B + p_N = 1$ otteniamo infine che $p_B = 0.4$. Usando le formule (3) ricaviamo
$$p_{AA} = 0.04 \quad p_{NN} = 0.16 \quad p_{BB} = 0.16$$
$$p_{AB} = 0.16 \quad p_{AN} = 0.16 \quad p_{BN} = 0.32.$$

2. Si tratta di una probabilità condizionata. Gli eventi coinvolti sono "il figlio piega la lingua solo verso il basso" e "la madre piega la lingua in tutte le

direzioni ed il padre solo verso l'alto". Dobbiamo prima di tutto calcolare qual è la probabilità dell'intersezione. Siccome la madre piega la lingua in tutte le direzioni necessariamente il suo genotipo è AB, mentre il genotipo del padre può essere sia AA sia AN. Ora, per la legge di disgiunzione di Mendell abbiamo che nel caso il padre abbia genotipo AA, nessuno dei figli potrà piegare la lingua verso il basso, in quanto i loro possibili genotipi possono solo essere AB (tutte le direzioni) o AA (verso l'alto). Quindi ai fini del calcolo della probabilità dell'intersezione, dobbiamo assumere che il padre abbia genotipo AN, dunque, per la legge di disgiunzione di Mendell abbiamo che un quarto dei figli avrà genotipo BN. Siccome padre e madre hanno genotipi indipendenti, come pure è indipendente quale cromosoma passano ai figli, la probabilità dell'intersezione è:

$$\frac{1}{4} \cdot p_{AN} \cdot p_{AB}.$$

Ora, le probabilità che i genitori abbiano il fenotipo citato sono date da $F_T = p_{AB}$ e $F_A = p_{AA} + p_{AN}$ quindi la probabilità condizionata cercata è

$$\frac{\frac{1}{4} \cdot p_{AN} \cdot p_{AB}}{p_{AB} \cdot (p_{AA} + p_{AN})} = \frac{p_N}{2(p_A + 2p_N)} = \frac{1}{5}.$$

3. Se entrambi i genitori piegano la lingua solo verso l'alto significa che entrambi hanno genotipo AN o AA. Quindi è impossibile che loro figlio abbia un genotipo contenente l'allele B. Dunque la probabilità è 0.

4. Come sopra, si tratta di una probabilità condizionata. Gli eventi coinvolti sono "il figlio piega la lingua solo verso il basso" e "la madre piega la lingua in tutte le direzioni". Calcoliamo la probabilità dell'intersezione dei due eventi. Poiché la madre piega la lingua in tutte le direzioni deve avere genotipo AB. Nel caso la madre abbia genotipo AB, possiamo ottenere dei figli che abbiano genotipo BN attraverso l'accoppiamento con un padre avente genotipo, AN o NN. Possiamo ottenere invece figli aventi genotipo BB se la madre si accoppia con padri che abbiano genotipo BB o AB. L'ultimo caso è quello in cui il padre abbia genotipo BN, in questo caso un quarto dei figli avrà genotipo BB e un altro quarto avrà genotipo BN. Nella seguente tabella inseriamo i dati che otteniamo dalla legge di disgiunzione di Mendell: al genotipo del padre associamo quale frazione dei figli ha il fenotipo "piega la lingua verso il basso".

AN	1/4
NN	1/2
BB	1/2
AB	1/4
BN	1/2

Quindi, la probabilità dell'intersezione è

$$p_{AB}\left(\frac{1}{4}p_{AN} + \frac{1}{2}p_{NN} + \frac{1}{2}p_{BB} + \frac{1}{4}p_{AB} + \frac{1}{2}p_{BN}\right)$$

Ora applichiamo la definizione della probabilità condizionata e dividiamo per la probabilità che la madre abbia fenotipo T (cioè p_{AB}) abbiamo quindi che la probabilità cercata è

$$\frac{1}{4}p_{AN} + \frac{1}{2}p_{NN} + \frac{1}{2}p_{BB} + \frac{1}{4}p_{AB} + \frac{1}{2}p_{BN} = \frac{2}{5}.$$