2. Compiti a casa — 31 ottobre 2006

2.1. Percentuali.

Esercizio 2.1. *Se in un anno in una popolazione i nuovi nati sono l'*$1,5\%$ *della popolazione e i morti l'*$1,8\%$ *della popolazione, di quanto è cresciuta o calata percentualmente la popolazione in un anno?*

Esercizio 2.2. *I prezzi in un supermercato vengono aumentati dell'*$1,5\%$ *il lunedi. Il venerdi della stessa settimana i prezzi vengono abbassati dell'*$1,8\%$*. Di quanto sono aumentati o diminuiti i prezzi rispetto alla settimana precedente?*

Esercizio 2.3. *I dati degli esercizi precedenti sono (sembrano) uguali. I risultati sono (se hai interpretato bene gli esercizi) diversi. Perché?*

Esercizio 2.4. *Per promuovere una nuova collana di libri (comprendente* 7 *titoli) che ho in vendita, decido di attuare il piano di sconti nella tabella di pagina 5.*

libri acquistati	*sconto*
1	10%
2	20%
3	30%
4	40%
5	50%
6	60%
7	70%

Tabella 3. Sconti

Sapendo che il prezzo di copertina dei libri è di 10 *Euro l'uno, quanto guadagno, al massimo, da ogni cliente? Quanto mi paga al massimo un cliente che ha seguito il corso di "Matematica e Statistica per Biologi" e quindi padroneggia al meglio le percentuali?*

Suggerimento: le risposte alle due domande sono diverse!

Esercizio 2.5. *In un negozio i prezzi sono aumentati del* 10% *il lunedi e di un ulteriore* 10% *il venerdi. Di quanto sono aumentati in totale? Di quanto devono essere abbassati per tornare ai prezzi della settimana precedente?*

Suggerimento: le ultime due domande hanno una risposta diversa. Perché?

2.2. Probabilità.

Esercizio 2.6. *Che probabilità ho di fare* 13 *al totocalcio? E di fare* 0*? (si assuma che per ogni partita i tre segni* 1*,* x*,* 2 *siano equiprobabili)*

Esercizio 2.7. *Al gioco del lotto su ogni ruota vengono estratti* 5 *numeri fra* 1 *e* 90*, senza rimbussolamento. Che probabilità ho di fare "estratto" (esce il numero scelto) sulla ruota di Torino se gioco un solo numero? E se ne gioco* 2*? Se ne gioco* n*? Quanti ne devo giocare per avere almeno il* 50% *di probabilità di vincita? E per avere la certezza?*

Esercizio 2.8. *Che probabilità c'è che scelto un numero di due cifre (cioè tra* 10 *e* 99*) la somma delle sue cifre sia* 8*? E che sia* 12*? Qual è lo spazio degli eventi? Qual è la somma più probabile?*

Esercizio 2.9. *Tirando* 5 *monete non truccate è più probabile ottenere due teste e tre croci o tre croci e due teste? Perchè? Quali sono le due probabilità richieste?*

Esercizio 2.10. *Tiro un dado e una moneta non truccati. Se esce testa e un numero pari, sottraggo* 1 *al risultato del dado. Se esce croce e un numero dispari, aggiungo* 1 *al risultato del dado. Qual è la probabilità di ottenere* 1 *come risultato finale? E* 6*? E* 7*?*

Esercizio 2.11. *Supponiamo di avere una moneta truccata... Vari lanci da parte del nostro assistente ci hanno portato a concludere che testa esce con probabilità* $1/3$ *e croce con probabilità* $2/3$*. Risolvi i due esercizi precedenti usando questa moneta.*

Esercizio 2.12. *Da un mazzo da poker di* 52 *carte pesco* 5 *carte. Che probabilità ho di avere un poker d'assi servito (*4 *assi su* 4 *e una quinta carta qualsiasi)?*

Esercizio 2.13. *Che probabilità ci sono che in una famiglia (italiana... usare i dati forniti a lezione) con tre figli siano tutti maschi? Tutte femmine? Due maschi e una femmina? Almeno due maschi?*

Esercizio 2.14. *Come cambiano le probabilità nell'esercizio precedente, sapendo che il primo figlio è un maschio? E sapendo che è una femmina?*

Esercizio 2.15. *Il vostro assistente ha passato un'altra notte insonne a contare i trifogli nel vostro prato, e ha stabilito che il* 95% *sono effettivamente trifogli, il* 4% *quadrifogli e l'*1% *pentafogli. Che probabilità ho, raccogliendone* 3 *a caso di avere in totale* 9 *foglie? E* 10*? E* 11*? E almeno* 12*?*

Suggerimento: calcola in modo pedante solo le prime tre probabilità, per la quarta c'è un modo furbo di procedere...

3. Esercitazioni del 31 ottobre 2006

Esercizio 3.1. *La distribuzione dei gruppi sanguigni nella popolazione italiana è: gruppo A* 40%*, gruppo B* 11%*, gruppo AB* 5%*, gruppo 0* 40%*. Il gruppo sanguigno è determinato da tre alleli, A, B e 0. Il fenotipo A corrisponde ai genotipi AA e A0; il fenotipo B ai genotipi BB e B0; il fenotipo AB al genotipo AB; il fenotipo 0 al genotipo 00.*

(i) *Supponendo che la popolazione italiana sia di Hardy-Weinberg, calcola le probabilità di ogni singolo allele e di ogni singolo genotipo.*
(ii) *Verifica che i risultati ottenuti nel punto precedente siano in accordo con le ipotesi di distribuzione di Hardy-Weinberg.*
(iii) *Trova in modo furbo e in modo pedante la probabilità che Leonardo e Martina abbiano un figlio con gruppo sanguigno 0.*

(i) L'ipotesi che la popolazione italiana sia di Hardy-Weinberg vuol dire che sono verificate le seguenti proprietà di correlazione fra distribuzione degli alleli e dei genotipi:

$$p_{ii} = p_i^2, \quad i = A, B, 0 \tag{1}$$

$$p_{ij} = 2p_i p_j, \quad i, j = A, B, 0, \quad i \neq j. \tag{2}$$

I dati che sappiamo sono

$$p_{00} = 40\% \tag{3}$$

$$p_{AB} = 5\% \tag{4}$$

$$p_{AA} + p_{A0} = 44\% \tag{5}$$

$$p_{BB} + p_{B0} = 11\%. \tag{6}$$

Da (1) e (3) otteniamo

$$p_0 = \sqrt{40\%} \approx 63.2\%. \tag{7}$$

Infine otteniamo

$$p_A^2 + 2p_0p_A = 44\% \quad \Rightarrow \quad p_A = -p_0 + \sqrt{p_0^2 + \frac{44}{100}} \approx -\frac{63.2}{100} + \sqrt{\frac{84}{100}} \approx 28.5\%$$

$$p_B^2 + 2p_0p_B = 11\% \quad \Rightarrow \quad p_B = -p_0 + \sqrt{p_0^2 + \frac{11}{100}} \approx -\frac{63.2}{100} + \sqrt{\frac{51}{100}} \approx 8.3\%$$

I valori ottenuti per le probabilità dei singoli alleli danno le seguenti probabilità per i genotipi:

$$p_{00} = p_0^2 = 40\% \tag{8}$$

$$p_{AA} = p_A^2 \approx 8.1\% \tag{9}$$

$$p_{BB} = p_B^2 \approx 0.7\% \tag{10}$$

$$p_{AB} = 2p_Ap_B \approx 4.7\% \tag{11}$$

$$p_{A0} = 2p_Ap_0 \approx 36.0\% \tag{12}$$

$$p_{B0} = 2p_Bp_0 \approx 10.5\%. \tag{13}$$

(ii) I valori appena ottenuti per i genotipi danno i seguenti valori di probabilità per i fenotipi: A circa 44.1%, B circa 11.2%, AB circa 4.7% e 0 40%, compatibili (a meno degli errori di approssimazione compiuti) con i dati iniziali. Pertanto possiamo affermare che la popolazione di partenza è di Hardy-Weinberg.

(iii) Modo furbo: dato che la popolazione italiana è di Hardy-Weinberg, la probabilità che un figlio di Leonardo e Martina abbia gruppo sanguigno 0 è il 40%.

Modo pedante: affinché loro figlio sia di gruppo 0, Leonardo e Martina possono essere dei seguenti genotipi: A0, B0 o 00. Analizziamo le probabilità nella tabella di pagina 7.

	A0	B0	00
A0	$\frac{1}{4}\left(\frac{36}{100}\right)^2 = 3.24\%$	$\frac{1}{4}\frac{36}{100}\frac{10.5}{100} = 0.945\%$	$\frac{1}{2}\frac{36}{100}\frac{40}{100} = 7.2\%$
B0	$\frac{1}{4}\frac{36}{100}\frac{10.5}{100} = 0.945\%$	$\frac{1}{4}\left(\frac{10.5}{100}\right)^2 \approx 0.27\%$	$\frac{1}{2}\frac{10.5}{100}\frac{40}{100} = 2.1\%$
00	$\frac{1}{2}\frac{36}{100}\frac{40}{100} = 7.2\%$	$\frac{1}{2}\frac{10.5}{100}\frac{40}{100} = 2.1\%$	$\left(\frac{40}{100}\right)^2 = 16\%$

Tabella 4. Calcolo della probabilità per Leonardo e Martina di avere un figlio con gruppo sanguigno 0.

In totale la probabilità è del

$$3.24\% + 0.945\% + 7.2\% + 0.945\% + 0.27\% + 2.1\% + 7.2\% + 2.1\% + 16\% = 40\%.$$

Esercizio 3.2. *Qual è la probabilità p_n che in un gruppo di n persone a caso almeno due compiano gli anni lo stesso giorno? Quanto deve essere n affinché la probabilità sia maggiore del 50%? E del 90%?*

Innanzitutto, per semplicità, supporremo che non esista il 29 febbraio e che ogni giorno di nascita sia equiprobabile[4], con probabilità pari a $\frac{1}{365}$. Inoltre, dato che se $n \geq 366$ si ha la certezza che almeno due persone compiano gli anni lo stesso giorno, supponiamo $1 \leq n \leq 365$. È molto più facile calcolare la probabilità dell'evento complementare q_n, ovvero che nel gruppo di n persone non vi sia nessuna coppia che

[4] Analizzando tabelle con le statistiche delle nascite si vede che questa ipotesi non è del tutto corretta. In alcuni periodi nascono più persone che in altri.

compie gli anni lo stesso giorno. La probabilità richiesta si trova poi per differenza $p_n = 1 - q_n$.

Affermo che[5]

$$q_n = \frac{365!}{(365-n)!}\frac{1}{365^n}.$$

Dimostro per induzione l'affermazione.

La formula è vera se $n = 1$: c'è solo una persona, e pertanto $q_1 = 1$.

Supponiamo che la formula sia vera per $k \leq 364$ persone e calcoliamola per $k + 1$. L'evento E_{k+1}, "le persone $a_1, \ldots, a_{k+1}$ compiono gli anni in giorni a due a due diversi", si può espimere come unione dell'evento E_k, "le persone $a_1, \ldots, a_k$ compiono gli anni in giorni a due a due diversi", e dell'evento D_{k+1}, "la persona a_{k+1} ha compleanno distinto da quelli di $a_1, \ldots, a_k$".

La probabilità di E_k è, per ipotesi induttiva,

$$P(E_k) = q_k = \frac{365!}{(365-k)!}\frac{1}{365^k}.$$

La probabilità di D_{k+1}, sapendo che è accaduto E_k è

$$p(D_{k+1}|E_k) = \frac{365-k}{365},$$

infatti restano $365-k$ giorni possibili per il compleanno di a_{k+1} (k sono già occupati dai compleanni degli altri) su un totale di 365 giorni e "casi favorevoli diviso casi totali" ci fornisce la probabilità dell'evento.

Pertanto la probabilità di E_{k+1} è data dal prodotto di quella di E_k per quella di A_{k+1} sapendo che è accaduto E_k, ovvero

$$P(E_{k+1}) = q_{k+1} = \frac{365!}{(365-k)!}\frac{1}{365^k} \cdot \frac{365-k}{365} = \frac{365!}{(365-(k+1))!}\frac{1}{365^{k+1}}.$$

Questo dimostra l'affermazione.

Nella tabella di pagina 8 diamo i valori della probabilità p_n per alcuni n.

n	p_n
2	0.27%
10	11.69%
23	50.73%
32	75.33%
41	90.32%
47	95.48%
57	99.01%
115	99.9999998%

TABELLA 5. Probabilità p_n che in un gruppo di n persone almeno due compiano gli anni lo stesso giorno

Non ci deve stupire molto che nei 115 che hanno effettuato il test di ingresso ci fossero sovrapposizioni di date di nascita... Questo evento accade mooooooooolto spesso!

Il nostro stupore nasce dal fatto che quando pensiamo che due persone in un gruppo hanno lo stesso compleanno confondiamo questo evento con uno molto più

[5]con $l!$ (leggi "l fattoriale"), $l \in \mathbb{Z}$, si intende il prodotto dei numeri interi da 1 ad l compreso. Ad esempio $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

improbabile: "io e un'altra persona del gruppo abbiamo lo stesso compleanno". La probabilità di questo evento è

$$p'_n = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n,$$

(perchè? come si calcola?) e alcuni di queste probabilità sono espresse nella tabella di pagina 9.

n	p'_n
2	0.27%
10	2.44%
23	5.86%
32	8.15%
41	10.39%
47	11.86%
57	14.24%
115	26.86%
366	63.26%.

Tabella 6. Probabilità p'_n che in un gruppo di n persone almeno un altro compia gli anni lo stesso giorno del primo

Da notare che in questo caso, anche con più di 365 persone l'evento considerato è tutt'altro che certo!

Esercizio 3.3. *Confronta le due tabelle.* $p_2 = p'_2$. *Perché? C'è un motivo o è un caso?*

Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri, 7 — I-56126 Pisa, Italy
E-mail address: `a.saracco@sns.it`