

Prefazione

“Ma a cosa serve la Matematica?” Quante volte ti sarai fatta questa domanda. . . mentre litigavi con l’ennesimo esercizio assegnato da quel sadico del professore di matematica delle superiori, oppure quando hai scoperto, con un’emozione che variava dalla rassegnazione allo stupore all’orrore¹, che anche iscritto a Scienze Biologiche (o Scienze Naturali, o Chimica, o Geologia, o Farmacia, o altri corsi di laurea ancora) ti tocca lo stesso seguire un corso di Matematica, magari con tanto di esame scritto e orale alla fine. . .

Per rispondere a questa domanda, prova a pensare un attimo a cosa consiste il lavoro del Biologo (o del Chimico, o dello scienziato in generale). Ci sono tipicamente due fasi: la raccolta dati e l’elaborazione di un modello. Effettui un esperimento più e più volte, osservi un fenomeno per lungo tempo, e raccogli dati. Montagne di dati (più ce ne sono meglio è). Spesso sono dati numerici (concentrazioni di sostanze, misure di temperatura. . .), a volte dati qualitativi (comportamenti di cavie, reazioni a stimoli. . .). Ma avere i dati grezzi non basta, è solo l’inizio: come scienziato, il tuo compito è *interpretare* i dati, capire quali sono le *leggi* che regolano il fenomeno che stai studiando e che producono i dati che hai raccolto. A volte puoi farlo usando i dati così come li hai ottenuti; a volte invece è necessario un ulteriore *trattamento* dei dati, che li colleghi ad altri dati raccolti o ad altre caratteristiche del fenomeno. In ogni caso, il tuo compito è, usando tutti i mezzi (fisici e mentali) a tua disposizione, comprendere la *struttura* dei tuoi dati, e usare questa struttura per capire il fenomeno che stai esaminando.

Non è finita qui. Per verificare se hai interpretato correttamente i dati, il passo successivo è la creazione di un *modello*; una rappresentazione semplificata ma fedele del fenomeno che stai studiando, depurata da tutti i dettagli irrilevanti, che evidenzia i processi principali in gioco e che ti permetta di effettuare *predizioni* sul comportamento del fenomeno, anche in contesti diversi da quello in cui hai effettuato l’esperimento. Predizioni che poi confronterai con i risultati di nuovi esperimenti, per vedere se il tuo modello è efficace e la tua comprensione del fenomeno completa, oppure se ti è sfuggito qualcosa, e ci sono altre strutture da scoprire nei tuoi dati. Il continuo e fruttuoso intescambio fra queste due fasi (esperimenti che portano a modelli, che a loro volta suggeriscono esperimenti da fare, i cui risultati suggeriscono nuovi modelli, e così via) è il cuore del metodo scientifico.

¹O forse anche con un pizzico di interesse? Qualche studente a cui la Matematica tutto sommato piace esiste, e questo libro è scritto anche per loro.

Ebbene: la Matematica è il principale strumento a tua disposizione per *comprendere e descrivere* strutture, di qualsiasi genere, non necessariamente numeriche, e per *costruire e rappresentare* modelli di fenomeni. La Matematica non è una lista di ricette per manipolazioni formali più o meno prive di senso di lettere e numeri; la Matematica è principalmente un modo di pensare, che permette di identificare e di descrivere le strutture che regolano il funzionamento della natura. È un linguaggio, che ti permette di esprimere chiaramente, in modo non ambiguo e comprensibile dagli scienziati di tutto il mondo, le tue scoperte e i tuoi modelli dei fenomeni che stai studiando. Ed è sì anche una serie di ricette (di *algoritmi*) per il trattamento dei dati; ma sono manipolazioni che, tutt'altro che prive di senso, riflettono invece la struttura profonda del fenomeno che stai studiando.

Insomma, nella pratica scientifica del Biologo (del Chimico, del Naturalista, eccetera) la Matematica compare essenzialmente in due contesti: nel trattamento e interpretazione dei dati sperimentali; e nella creazione e utilizzo di modelli dei fenomeni naturali. Per questo motivo, una conoscenza della Matematica di base è essenziale per qualsiasi scienziato.

“Ma io non ho mai capito niente di Matematica! Dovrò rinunciare anche a fare il Biologo?” No, affatto. Capire e utilizzare² la Matematica di base è *alla portata di qualsiasi persona intelligente*; e se ti sei iscritta a una facoltà scientifica stupida certo non sei. Questo non vuol dire che si tratti di un compito semplice; richiederà studio e impegno da parte tua, ma ce la puoi fare. E questo libro è stato scritto proprio per aiutarti il più possibile a raggiungere l'obiettivo.

Gli argomenti trattati (vedi più oltre per un elenco completo) sono alla base di qualsiasi trattamento matematico e statistico di dati sperimentali, e di qualsiasi formulazione di modelli matematici; e sono esposti in modo da rendere il più possibile evidente questo loro uso. La scelta dei numerosi esempi svolti (spesso tratti da situazioni e contesti biologici, chimici o medici), le motivazioni usate per introdurli e il modo stesso con cui vengono presentati sono stati scelti con questo obiettivo in mente. In particolare, più che descrivere risultati teorici generali si è cercato di fornirti le capacità necessarie per interpretare e manipolare gli strumenti matematici a tua disposizione. Per esempio, dopo aver studiato questo testo dovresti essere in grado sia di capire il comportamento di una funzione data (confrontandolo se possibile con i dati biologici del fenomeno che quella funzione dovrebbe rappresentare) sia di costruire funzioni che abbiano un dato comportamento (dettato per esempio dalle ipotesi biologiche della situazione che vorresti studiare).

Una prima caratteristica di questo libro è quindi l'abbondanza di motivazioni ed esempi, spesso tratti da situazioni di evidente interesse per uno scienziato della vita. Le spiegazioni fornite puntano principalmente a far capire il perché di certi fenomeni e di certi comportamenti; definizioni e risultati sono introdotti e motivati all'interno del discorso. Il tutto senza rinunciare al rigore della presentazione, e chiarendo esplicitamente quando le argomentazioni proposte sono complete e quando invece richiederebbero ulteriori strumenti matematici per giustificare del tutto il risultato descritto. Alcuni di questi strumenti ulteriori sono presentati nelle *Curiosità*. Con questo termine sono indicati argomenti, annotazioni e talvolta anche dimostrazioni più avanzate, non strettamente necessarie per la comprensione di base degli argomenti ma sicuramente utili per una comprensione più approfondita, e per segnalare agli studenti più

²Creare nuova Matematica è invece, oggettivamente, più difficile; ma per questo ci sono i Matematici, e tutt'al più il tuo compito sarà riuscire a spiegare loro qual è il problema da risolvere. E alcuni dei risultati più eccitanti della scienza contemporanea (in Genetica ci sono ottimi esempi) sono scaturiti proprio da collaborazioni e conversazioni fra Matematici e non Matematici.

interessati (sì, sto parlando di te) che quanto stanno leggendo è solo una piccola parte di un campo molto più vasto, in modo da stimolare (si spera) anche la loro curiosità.

Un'altra caratteristica importante del testo è che cerca di spingere verso una lettura *attiva*. Non c'è niente da fare: l'unico modo efficace per imparare la Matematica è *fare* Matematica. La semplice lettura del testo non basta. Un ragionamento matematico è per sua stessa natura una successione logica di argomenti; viene quindi naturale seguire i singoli passaggi senza porsi problemi (del resto, è tutto logico) per poi ritrovarsi in fondo al capitolo e accorgersi: primo, di non saper risolvere un solo esercizio; secondo, di non aver minimamente capito perché siano stati fatti certi ragionamenti piuttosto che altri; terzo, di non essere assolutamente in grado di ricostruirli. Per cercare di prevenire il problema, in punti strategici ti sarà chiesto di verificare subito se hai capito il motivo di certi passaggi; e, per invogliarti ulteriormente a interagire con ciò che leggi, il testo (come avrai già notato) si rivolge al lettore direttamente in seconda persona. Le definizioni principali sono segnalate con una nota a margine, e i risultati più importanti sono evidenziati nel testo:

Risultato importante: passare l'esame avendo capito davvero la Matematica studiata!

Qui è introdotto un concetto rilevante

Infine, ciascun capitolo è corredato da tre importanti sezioni finali. Le *Conoscenze e Capacità* riassumono in breve i principali concetti e risultati che dovresti aver acquisito studiando il capitolo, e le principali tecniche che ora dovresti essere in grado di usare. I *Problemi Guida* sono esercizi svolti, tipicamente un poco più complessi di quelli risolti negli esempi, scelti perché presentano applicazioni o tecniche particolarmente significative che possono fungere da (appunto) guida per la soluzione di problemi simili. Conclude ciascun capitolo un'ampia scelta di *Esercizi*, che variano da semplici verifiche delle conoscenze presentate ad applicazioni in ambito scientifico delle tecniche apprese, a (rari) approfondimenti dei risultati studiati.

Il testo è stato strutturato in modo da potersi adattare a corsi di lunghezza e contenuti diversi. In breve:

1. Il Capitolo 1 richiama una serie di argomenti (numeri, operazioni, percentuali, teoria intuitiva degli insiemi e logica elementare) che dovresti aver già studiato alle superiori (e anche prima) ma che può essere utile ripassare, per essere sicuro di avere un punto di partenza solido e un linguaggio condiviso.
2. I Capitoli 2 e 8 presentano le basi della teoria della Probabilità. In particolare, il Capitolo 2 descrive le definizioni e i concetti di base concentrandosi soprattutto sullo studio della probabilità su insiemi finiti, e pur usando soltanto strumenti elementari arriva a risultati non banali, con applicazioni fondamentali per esempio in Genetica. Il Capitolo 8 invece usa le tecniche dell'Analisi Matematica presentate nei capitoli precedenti per ampliare lo spettro delle applicazioni a casi in cui gli insiemi finiti non bastano. Inoltre, il Capitolo 2 contiene un'introduzione al calcolo combinatorio, e il Capitolo 8 una discussione dell'uso dei campioni nello studio statistico di una popolazione.
3. Il Capitolo 3 è un'introduzione agli strumenti usati per presentare dati e fenomeni. Si parla quindi di funzioni, coordinate cartesiane e vari tipi di diagrammi. Inoltre, sono discussi alcuni concetti di base di Statistica (media, varianza e argomenti correlati).
4. Per studiare e costruire modelli matematici di fenomeni naturali è importante conoscere bene il comportamento delle funzioni più semplici, da cui si parte per la costruzione di qualsiasi modello. Lo scopo dei Capitoli 4 e 5 è quindi la descrizione in dettaglio delle proprietà delle funzioni elementari (lineari, polinomiali, razio-

nali, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche), e di un nucleo di metodi utili per manipolarle e adattarle ai nostri scopi. Sono anche presentate fondamentali tecniche statistiche di interpolazione, quale il metodo dei minimi quadrati; e sono introdotti su esempi specifici significativi argomenti teorici (limiti, continuità, successioni e serie).

5. I Capitoli 6, 7 e 9 costituiscono un'introduzione all'Analisi Matematica, adatta alle esigenze di uno scienziato della vita. Le tecniche qui descritte sono di gran lunga le più utilizzate per lo studio e la creazione di modelli matematici di fenomeni naturali, e si è cercato di presentarle in modo da permetterti di capire cosa significano e che conclusioni ne puoi trarre (scopo di uno studio di funzioni non è fare un bel disegno ma capire cosa la funzione che hai studiato ti dice sul fenomeno che deve rappresentare).
6. Infine, il Capitolo 10 è dedicato all'Algebra Lineare (vettori, matrici, sistemi lineari) e alle sue applicazioni; in particolare, sono descritte tecniche generali per lo studio dei sistemi lineari.

Il materiale trattato è probabilmente più di quanto possa essere coperto in un singolo corso, anche annuale. Il nucleo minimo per un corso semestrale di Matematica è costituito dai Capitoli 4, 5, 6 e 7, richiamando i prerequisiti dai Capitoli 1 e 3 ove necessario. Un corso semestrale di Probabilità e Statistica può basarsi sui Capitoli 2, 3 e 8, assieme al materiale sull'interpolazione presente nei Capitoli 4 e 5 e gli eventuali prerequisiti del Capitolo 1. Un buon corso annuale di Matematica senza la parte di Probabilità e Statistica può coprire i Capitoli 1, 3 (eventualmente escludendo le ultime sezioni), dal 4 al 7, e i Capitoli 9 e 10. Infine, un corso annuale di Matematica, Probabilità e Statistica (quale quello da me insegnato in questi anni) si può basare sui Capitoli da 1 a 8, e concludersi con parte del Capitolo 9 o del Capitolo 10 a seconda degli interessi del docente e degli studenti (e del tempo disponibile).

Questo testo contiene solo alcuni degli argomenti di base di Matematica che possono servire a uno scienziato. Se sei interessata, ti consiglio caldamente di proseguire i tuoi studi su testi più avanzati. Come punto di partenza, giusto per citare libri (validi) editi da questa casa editrice, ti consiglio: F. Conti, *Calcolo — Teoria e applicazioni*, per proseguire lo studio dell'Analisi Matematica; S.A. Glantz, *Statistica per discipline biomediche*, per approfondire lo studio della Statistica; e M. Abate, C. de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare*, per continuare lo studio della Geometria e dell'Algebra Lineare. Inoltre, se sai leggere l'inglese³ un buon libro in cui trovare miriadi di applicazioni della Matematica alla descrizione di fenomeni naturali è J.A. Adams, *Mathematics in nature*, Princeton University Press, Princeton, 2003.

Infine, il dovuto piacere dei ringraziamenti. Un libro come questo non nasce dal nulla; mentre i difetti sono tutti opera mia, il merito dei meriti va suddiviso fra tanti. Il classico testo di E. Batschelet (*Introduzione alla matematica per biologi*, Piccin, Padova, 1988) e i testi, forse meno classici ma sempre validi, di J.C. Newby (*Mathematics for the biological sciences*, Clarendon Press, Oxford, 1980) e di R.R. Sokal e F.J. Rohlf (*Introduction to biostatistics*, W.H. Freeman & co., New York, 1987) sono stati una fondamentale fonte d'ispirazione. Questo testo non sarebbe mai nato senza Chiara Tartara, che ha creduto nel progetto fin dall'inizio, e senza Paolo Roncoroni e Stefano Ganci della McGraw-Hill Italia, che l'hanno portato a compimento. Un ringraziamento speciale va ai miei studenti di questi anni, che hanno subito le ver-

³E se non lo sai devi assolutamente impararlo al più presto: l'inglese ormai è la lingua mondiale della scienza.

sioni iniziali delle dispense suggerendomi importanti e sostanziali miglioramenti (e confortandomi con i buoni esiti dei loro esami, grazie!). Infine, grazie a (in ordine rigorosamente alfabetico) Jacopo, Leonardo e Niccolò Abate, Giovanni Alberti, Paolo Baldi, Paola Cerrai, Pietro Di Martino, Adele Manzella, Umberto Mura, Matteo Novaga, Jasmin Raissy, Alberto Saracco, Francesca Tovenà e Rosetta Zan, che hanno contribuito a sostenermi (professionalmente o personalmente) nel portare a termine questo (apparentemente interminabile) progetto.

Marco Abate