Prefazione

Questo libro è la storia di un successo.

La geometria euclidea classica ha sempre avuto un grosso punto debole (di cui i geometri greci erano ben coscienti): non è in grado di studiare in maniera soddisfacente curve e superfici che non siano rette e piani. L'unica eccezione rilevante sono le coniche. Ma è un'eccezione che conferma la regola: le coniche sono viste come intersezione di un cono (insieme costituito dall'unione di rette per un punto che formano un angolo costante con una retta data) con un piano, per cui sono direttamente riconducibili alla geometria lineare di rette e piani. La teoria delle sezioni coniche è giustamente considerata uno dei punti più alti della geometria classica; al di là, il buio. Qualche curva speciale, un paio di superfici assolutamente particolari; ma di una teoria generale neanche l'ombra.

Il punto è che i geometri classici non avevano il linguaggio necessario per parlare di curve o superfici in generale. La geometria euclidea è basata assiomaticamente su punti, rette e piani; qualunque cosa dev'essere descritta in quei termini, e curve e superfici in generale non si prestano a essere presentate con quel vocabolario. Tutto ciò era molto frustrante; basta guardarsi intorno per vedere che il mondo è pieno di curve e superfici, mentre rette e piani sono soltanto una costruzione tipicamente umana.

Escono i greci e gli egiziani, passano i secoli, gli arabi iniziano a guardarsi intorno, gli algebristi italiani sfondano la barriera delle equazioni di terzo e quarto grado, entra Cartesio e scopre le coordinate cartesiane. Siamo agli inizi del 1600, più di un millennio dopo gli ultimi fuochi della geometria greca; finalmente sono disponibili strumenti molto flessibili per descrivere curve e superfici: come immagine o come luoghi di zeri di funzioni espresse in coordinate cartesiane. Il bestiario di curve e superfici speciali si amplia enormemente, e diventa chiaro che il problema principale della teoria in questo momento storico consiste nel riuscire a definire precisamente (e misurare) cosa distingue curve e superfici da rette e piani. Cosa vuol dire che una curva è curva (o che una superficie è curva, se ci permetti il gioco di parole)? E come si misura *quanto* una curva o una superficie è curva?

Rispetto al millennio passato, è sufficiente aspettare ben poco per avere risposte soddisfacenti a queste domande. Nella seconda metà del 1600 Newton e Leibniz scoprono il calcolo differenziale e integrale, e cambiano la faccia della matematica (e del mondo, aprendo la strada alla rivoluzione industriale). Il calcolo di Newton e Leibniz fornisce strumenti efficaci per studiare, misurare e predire il comportamento di oggetti in movimento. Il percorso tracciato da un punto in movimento nel piano o nello spazio è una curva. Il punto traccia una retta se e solo se la sua velocità non cambia direzione; il suo tracciato è tanto più curvo tanto più la direzione della sua velocità varia. Quindi è naturale misurare quanto il percorso è curvo misurando la variazione della direzione della velocità; e il calcolo differenziale è nato proprio per misurare variazioni. *Voilà,* abbiamo una definizione efficace e computabile di curvatura di una curva: la lunghezza del vettore accelerazione (se la curva è percorsa a velocità scalare costante, cosa che si può sempre supporre).

Lo sviluppo della geometria differenziale di curve e superfici nei due secoli successivi è vasto e impetuoso. Già nel 1700 molti matematici di talento applicarono con successo le nuove tecniche del calcolo differenziale alla geometria, fino ai grandi successi della scuola francese del 1800, che ottiene i cosiddetti *teoremi fondamentali della teoria locale delle curve e delle superfici,* che dimostrano come gli strumenti introdotti siano (necessari e) sufficienti per descrivere *tutte* le proprietà locali di curve e superfici.

Almeno localmente. Già, perché come in ogni storia di successo che si rispetti, siamo solo all'inizio; serve il colpo di scena. La teoria che abbiamo descritto funziona molto bene per le curve; non altrettanto per le superfici. O, più precisamente, nel caso delle superfici siamo ancora solo sulla superficie (appunto) dell'argomento; la descrizione locale fornita dalle tecniche del calcolo differenziale non è sufficiente per dare conto di tutte le proprietà globali delle superfici. Detto molto alla buona, le curve, anche in grande, sono essenzialmente rette e circonferenze un po' spiegazzate nel piano e nello spazio; invece, descrivere le superfici solo come pezzi di piano un po' spiegazzati nello spazio, benché utile per fare i conti, è eccessivamente limitativo e impedisce di cogliere e trattare le proprietà più profonde e significative delle superfici, che vanno al di là della semplice misura della curvatura nello spazio.

Probabilmente la persona più cosciente di questo stato di cose era Gauss, uno dei più grandi matematici (se non il più grande) della prima metà del 1800. Con due teoremi magistrali, Gauss riuscì sia a mostrare quanto ci fosse ancora da scoprire sulle superfici sia a indicare la strada giusta in cui proseguire lo studio.

Col primo teorema, il *teorema egregium,* Gauss dimostrò che mentre dall'interno le curve sono tutte uguali (un essere intelligente unidimensionale non sarebbe in grado dall'interno del suo mondo unidimensionale di decidere se vive su una retta o su una curva), questo non è affatto vero per le superfici: esiste un tipo di curvatura (la *curvatura Gaussiana,* appunto) che è misurabile rimanendo all'interno della superficie, e che può variare da superficie a superficie. In altre parole, è possibile decidere se la Terra è piatta o curva senza muoversi dal giardino di casa: basta misurare (con strumenti sufficientemente precisi. . .) la curvatura Gaussiana del proprio orticello.

Il secondo teorema, noto come *teorema di Gauss-Bonnet* in quanto completato ed esteso da Pierre Bonnet, uno degli studenti più brillanti di Gauss, rivelò che limitarsi a studiare le proprietà locali significa non accorgersi che a livello globale si presentano fenomeni profondi e significativi con implicazioni geometriche anche a livello locale. Per esempio, una delle conseguenze del teorema di Gauss-Bonnet è che per quanto si possa deformare una sfera nello spazio, stiracchiandola a piacere (senza romperla) e quindi cambiando *localmente* in modo apparentemente arbitrario il valore della curvatura Gaussiana, *l'integrale della curvatura Gaussiana su tutta la superficie rimane costante:* ogni variazione locale della curvatura viene necessariamente compensata da un'altra variazione della curvatura da qualche altra parte.

Un altro argomento importante indicava l'interrelazione fra proprietà locali e globali: lo studio delle curve sulle superfici. Uno dei problemi fondamentali della geometria differenziale classica (vista la sua importanza anche pratica) è identificare la curva più breve (la *geodetica*) fra due punti su una superficie. Già dimostrare che se i due punti sono vicini la geodetica che li congiunge esiste ed è unica non è completamente banale; se i due punti sono lontani potrebbero esisterne infinite, oppure potrebbe addirittura non esisterne alcuna. Questo è un altro tipo di fenomeno che è di natura prettamente globale, e che non può essere trattato solo con le tecniche del calcolo differenziale, che è intrinsecamente locale.

Di nuovo, per procedere oltre occorrevano strumenti e linguaggi nuovi, adatti allo studio di proprietà globali. Arriviamo così al ventesimo secolo, con la creazione e lo sviluppo (da parte di Poincaré e altri) della topologia, che si rivela l'ambiente ideale in cui inquadrare e comprendere le proprietà globali delle superfici. Giusto per citare un esempio, la descrizione fornita da Hopf e Rinow delle superfici in cui le geodetiche sono estendibili per tutti i tempi (proprietà che implica, in particolare, che ogni coppia di punti è collegata da una geodetica) è intrinsecamente topologica.

E anche questo è solo l'inizio di una storia ancora più importante. Partendo dalla fondamentale intuizione di Riemann (che dimostrò in particolare come le cosidette geometrie non-euclidee non fossero altro che geometrie su superfici diverse dal piano, anche se non necessariamente immerse nello spazio euclideo), la definizione e i concetti di teoria delle superfici bidimensionali sono stati estesi al caso delle varietà n-dimensionali, l'equivalente di dimensione qualsiasi delle superfici. La geometria differenziale delle varietà si è rivelata uno dei campi più significativi della matematica contemporanea; il suo linguaggio e i suoi risultati sono utilizzati più o meno ovunque (e non solo in matematica: la relatività generale, per fare un esempio, non potrebbe esistere senza la geometria differenziale). E chissà cosa ci riserverà il futuro. . .

Obiettivo di questo libro è raccontare le parti principali di questa storia dal punto di vista della matematica contemporanea. Il Capitolo 1 descrive la teoria locale delle curve, dalla definizione di curva fino al teorema fondamentale della teoria locale delle curve. I Capitoli 3 e 4 trattano invece la teoria locale delle superfici, dalla definizione (moderna) di superficie fino al teorema egregium di Gauss. Il Capitolo 5 è invece dedicato allo studio delle geodetiche su una superficie, arrivando fino alla dimostrazione dell'esistenza e unicità locale.

Gli altri capitoli (e alcuni dei Complementi ai vari capitoli; vedi oltre) sono invece dedicati alle proprietà globali. Il Capitolo 2 presenta alcuni risultati fondamentali della teoria globale delle curve nel piano, fra cui il *teorema della curva di Jordan,* che è una buona esemplificazione di un altro motivo dello sviluppo relativamente tardo dell'interesse per le proprietà globali delle curve: l'enunciato del teorema di Jordan sembra ovvio fin quando non si prova a dimostrarlo — e a quel punto si rivela insospettatatamente difficile, e molto più profondo del previsto.

Il Capitolo 6 è dedicato al teorema di Gauss-Bonnet, di cui presenteremo una dimostrazione completa, e alle sue molteplici applicazioni. Infine, nel Capitolo 7 discuteremo alcuni risultati importanti di teoria globale delle superfici (di cui uno, il teorema di Hartman-Niremberg, è stato dimostrato solo nel 1959), concentrandoci soprattutto sulle relazioni fra il segno della curvatura Gaussiana e la struttura globale (topologica e differenziale) delle superfici. Ci limiteremo a parlare di curve e superfici nel piano e nello spazio; ma la terminologia e i metodi che introdurremo sono compatibili con quelli usati per lo studio della geometria differenziale di varietà di dimensione qualsiasi.

Come libro di testo, abbiamo cercato di fornire vari percorsi possibili. Il percorso minimale consiste nel limitarsi alla teoria locale: i Capitoli 1, 3 e 4 sono leggibili indipendentemente dal resto, e permettono di presentare in circa due mesi di corso un tragitto compiuto dalle definizioni iniziali fino al teorema egregium di Gauss, a cui si possono aggiungere, se il tempo lo permette, le prime due sezioni del Capitolo 5, con le proprietà principali delle geodetiche. Un corso di questo genere è adatto e utile sia (ovviamente) a studenti di Matematica e Fisica dal second'anno in poi sia a studenti di Ingegneria e Informatica (tipicamente della laurea specialistica o magistrale) che necessitano di (o sono interessati a) strumenti matematici più avanzati di quelli appresi nella laurea triennale.

In un corso semestrale è invece possibile trattare adeguatamente anche la teoria globale, introducendo il Capitolo 2 sulle curve, la sezione finale del Capitolo 5 sui campi vettoriali, e, a scelta del docente, il Capitolo 6 sul teorema di Gauss-Bonnet oppure il Capitolo 7 sulla classificazione delle superfici chiuse con curvatura Gaussiana costante. Nella nostra esperienza, in un corso semestrale rivolto a studenti di Matematica e/o Fisica della laurea triennale è difficile trovare il tempo per trattare entrambi questi argomenti, per cui i due capitoli sono del tutto indipendenti l'uno dall'altro; ma in eventuali corsi annuali, o in corsi semestrali rivolti a studenti più avanzati, potrebbe essere possibile farlo, introducendo eventualmente anche materiale presentato nei Complementi.

Ogni Capitolo è corredato da diversi Problemi Guida: esercizi svolti, sia prettamente computazionali (una delle caratteristiche piacevoli della geometria differenziale di curve e superfici è che è possibile calcolare esplicitamente quasi tutto — geodetiche escluse) sia di tipo più teorico, il cui scopo è insegnarti a utilizzare efficacemente gli strumenti introdotti nel relativo Capitolo. Potrai poi testare le tue abilità risolvendo i numerosi Esercizi proposti, suddivisi per argomento.

Avrai già notato un'altra caratteristica didattica tipica di questo testo: ci rivolgiamo direttamente a te, lettore o lettrice. C'è un motivo preciso per questa scelta; vogliamo coinvolgerti attivamente nella lettura. Un testo di matematica, a qualsiasi livello, è una successione di ragionamenti, presentati uno di seguito all'altro con logica (si spera) impeccabile. Leggendo si viene trasportati dalle argomentazioni, fino ad arrivare in fondo e rendersi conto che non si ha la minima idea del perché l'autore ha seguito un percorso piuttosto che un altro, e (peggio) che non si è in grado di ricostruire autonomamente quel percorso. Per imparare la matematica non basta leggere; bisogna *fare* matematica. Lo stile adottato in questo testo vuole spingerti in questa direzione; oltre a motivazioni esplicite per tutti i concetti che introdurremo, troverai spesso domande dirette che cercheranno di stimolarti a una lettura attiva senza farti accettare nulla per fede (e magari cercheranno di aiutarti a rimanere sveglio se ti capiterà di studiare alle tre di notte. . .).

Questo libro ha anche la (vana?) ambizione di non essere solo un libro di testo, ma qualcosa di più. E questo è lo scopo dei Complementi. Esiste molto materiale estremamente interessante e significativo che usualmente non trova posto nei corsi (principalmente per mancanza di tempo), e che è talvolta difficile trovare nei libri. I Complementi presentano una scelta (ovviamente dettata dal nostro gusto personale) di questo materiale. Andiamo da dimostrazioni complete del teorema della curva di Jordan, anche per curve solo continue, e dell'esistenza delle triangolazioni su superfici (teoremi tipicamente citati e utilizzati spesso e dimostrati molto di rado), all'esposizione dettagliata del teorema di Hopf-Rinow sulle geodetiche o ai teoremi di Bonnet e Hadamard sulle superfici con curvatura Gaussiana di segno ben definito, passando attraverso la dimostrazione che tutte le superfici chiuse sono orientabili, o del teorema fondamentale della teoria locale delle superfici (che, per motivi che ti saranno chiari alla fine del Capitolo 4, usualmente non fa parte del programma standard). La speranza è che questo materiale aggiuntivo possa rispondere a domande naturali che potresti esserti posto durante lo studio, solleticare ulteriormente la tua curiosità, e fornire motivazioni ed esempi da cui partire per lo studio della geometria differenziale in dimensione qualsiasi. Un'avvertenza: con rare eccezioni, il materiale dei Complementi è sensibilmente più complesso di quanto presentato nel resto del libro, e per essere compreso a fondo richiede una partecipazione notevole da parte tua. Una rassicurazione: nulla di quanto fatto nei Complementi viene usato nella parte principale del testo. In prima lettura, i Complementi possono essere del tutto ignorati senza inficiare in alcun modo la comprensione del resto del materiale. Infine, essenzialmente per mancanza di spazio, il numero di esercizi nei Complementi è ridotto.

Due parole sui prerequisiti necessari per la lettura di questo libro. Come avrai capito, useremo tecniche e concetti del calcolo differenziale e integrale di più variabili reali, e di topologia generale. Le nozioni di topologia generale necessarie sono veramente solo quelle di base: aperti, funzioni continue, connessione e compattezza, e solo nel contesto degli spazi metrici. Tutto materiale che viene presentato in qualsiasi corso del secondo anno di Geometria e spesso anche in quelli di Analisi, e per il quale quindi non abbiamo sentito la necessità di fornire alcuna referenza precisa. Se fosse necessario, potrai trovare tutto quello che serve (e ben di più) nei primi quattro capitoli di [11].

Abbiamo voluto essere invece molto più precisi nel citare i risultati di Analisi Matematica che useremo, sia perché tipicamente piú profondi di quelli di topologia generale, sia per darti degli enunciati coerenti con le nostre esigenze. Sono tutti risultati standard, e trattati in qualsiasi corso di Analisi Matematica del secondo anno (con la possibile eccezione del Teorema 4.9.1); un buon testo a cui fare riferimento è [6].

Invece, non richiediamo alcuna esposizione preliminare alla topologia algebrica (per cui se non sai di cosa si tratta puoi stare tranquillo). Per questo motivo, la Sezione 2.1 contiene un'introduzione completa alla teoria del grado per applicazioni continue dalla circonferenza in sé, e la Sezione *7.5* presenta ciò che ci serve della teoria dei rivestimenti fra superfici.

Ovviamente, questo non è il primo libro sull'argomento, e non sarebbe potuto essere scritto senza i precedenti. Abbiamo trovato particolarmente utili i testi classici di do Carmo [4] e Spivak [21], e quelli meno classici ma altrettanto validi di Lipschutz [13] e Montiel e Ros [16]; se questo libro ti è piaciuto quelli sono sicuramente altri testi da consultare. Un buon punto di partenza per lo studio della geometria differenziale di varietà di dimensioni qualsiasi, oltre a [21], è [12].

Infine, il gradito dovere dei ringraziamenti. Questo libro non sarebbe mai nato e sarebbe stato sicuramente peggiore senza l'aiuto, assistenza, comprensione e pazienza di (in ordine rigorosamente alfabetico) Luigi Ambrosio, Francesca Bonadei, Piermarco Cannarsa, Cinzia Casagrande, Ciro Ciliberto, Michele Grassi, Adele Manzella e Jasmin Raissy. Un ringraziamento speciale ai nostri studenti di tutti questi anni, che si sono sorbiti varie versioni delle dispense segnalando implacabilmente ogni più piccolo errore. E infine un ringraziamento specialissimo a Leonardo, Jacopo, Niccolò, Daniele, Maria Cristina e Raffaele, che hanno impavidamente sopportato la trasformazione dei loro genitori in appendice della tastiera del computer, e che col loro sorriso ci ricordano che il mondo un qualche senso ancora ce l'ha.

Pisa e Roma, Luglio 2006 *Marco Abate, Francesca Tovena*